Variable Compleja I   CURSO 2019-20

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 4 DE PROBLEMAS

Funciones armónicas

44) ¿Para qué valores de los parámetros reales a, b, c, d es armónica la función

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3\,?$$

45) Halle la conjugada armónica de la función $u(x,y) = \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en el semiplano $\{(x,y) : \ x > 0\}$.

46) a) Encuentre todas las funciones armónicas de la forma $g(ax+by)$ donde g es una función real de clase C^2. ¿Qué funciones holomorfas tienen por parte real las funciones halladas?

b) Encuentre todas las funciones armónicas de la forma $h(x^2+y^2)$ donde h es una función real de clase C^2.

Series de potencias

47) Halle el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$,   **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$,   **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$,   **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

48) Lo mismo para las siguientes series:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \dfrac{z^n}{n^n}$,   **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$,   **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$,   **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$,

49) Calcule el radio de convergencia y la suma de las siguientes series de potencias:

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}, \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!}, \qquad \textbf{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n.$$

50) Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ¿qué representan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n$ en términos de f?

51) Desarrolle las siguientes funciones en series potencias del tipo indicado:

a) $\dfrac{z}{z^2-5z+6}$ y $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ en potencias de z;   **b)** $\dfrac{2z+3}{(z+1)^2}$ en potencias de $z-1$.

52) Supongamos que la serie de potencias $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tiene radio de convergencia $R = 1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$. Para $n \geq 0$ y z en el disco unidad, sean

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{y} \qquad s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

a) Demuestre que $s_n(z) = (1-z) \sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n$ y concluya que $f(z) = (1-z) \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n z^n$.

b) Demuestre que $f(z) \to 0$ cuando z se aproxima a 1 dentro de una región contenida en el disco unidad y en la que $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ está acotado.

Las funciones exponencial, trigonométricas e hiperbólicas

53) Compruebe las siguientes propiedades de la función exponencial:

a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. **b)** No existe $\lim_{z\to\infty} e^{-z}$.

54) ¿En qué puntos del plano son $\mathbb{C}$-diferenciables las siguientes funciones?

a) $\operatorname{sen}(e^z)$; **b)** $\cos\overline{z}$; **c)** $\dfrac{1}{e^z-1}$; **d)** $\dfrac{1}{e^z-e^{-z}}$.

55) Desarrolle en series de potencias (centradas en el origen) las siguientes funciones elementales:

$$(1-z)\cos z\,, \qquad \frac{e^{-z}}{1+z}, \qquad \frac{\operatorname{sen} z}{1-z^2}.$$

indicando en cada caso el radio de convergencia.

56) Escriba explícitamente la función cuya serie de potencias es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$ y calcule $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!}$.
(**Ayuda:** Evalúe la función exponencial en los puntos $\pm z$ y $\pm iz$.)

57) a) Demuestre que $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Deduzca que, en particular, $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z = 1 - 2\operatorname{sen}^2 z$.

b) Calcule las partes real e imaginaria de $\cos(x+yi)$, donde x, $y \in \mathbb{R}$.

58) Demuestre que para todo $z = x+yi \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes identidades:

a) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$, **b)** $|\cos z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x$.

59) ¿Para qué valores de z convergen las siguientes series? Razone la respuesta, aplicando los criterio adecuados.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz}$, **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$, **c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(nz)}{2^n}$.

60) Como veremos más adelante, podemos definir el valor principal de la función compleja n^z como sigue:

$$n^z = e^{(\log n)z},$$

donde $\log n$ es el valor habitual ya conocido del logaritmo de un número natural (al que en este curso vamos a dar un significado más amplio). Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ para $z \in \mathbb{C}$.

a) Demuestre que la serie converge si $\operatorname{Re} z > 1$.

b) Demuestre que si a es un número real con $a > 1$ entonces la serie converge uniformemente en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$.

Nota: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ es la *función Zeta de Riemann*. Puede definirse en un dominio mucho más amplio que el que indicamos arriba, pero para ello tenemos que desarrollar más conocimientos teóricos.