Variable Compleja I CURSO 2019-20

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Funciones de una variable compleja: límites y continuidad

32) Halle los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4-1}{z-i} & \text{si } z \neq i \\ 4i & \text{si } z = i, \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \le 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

33) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$, demuestre que entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{si } n = m \\ \infty, & \text{si } n > m. \end{cases}$$

34) Demuestre que toda función de la forma $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, definida de forma adecuada en el infinito, es continua en el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

35) Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto arbitrario en el plano complejo. Para un punto $z \in \mathbb{C}$, definimos

$$d(z, A) = \inf\{|z-a| : \ a \in A\}.$$

Demuestre que la función d es uniformemente continua en $\mathbb{C}$. De hecho, puede verse que d satisface una propiedad más fuerte que la continuidad uniforme, bien conocida en análisis. ¿Cuál?

Las converencias puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones

36) Consideremos la sucesión de funciones $f_n(z) = \dfrac{1-z^n}{1+z^n}$. Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) La sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge puntualmente a una función f en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \neq 1\}$. Determine explícitamente la función f.

b) La sucesión, de hecho, converge uniformemente a esa misma función f en todo subconjunto compacto de $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \neq 1\}$.

(**Ayuda**: Basta demostrar que, para cualquier r con $0 < r < 1$, la sucesión converge uniformemente tanto en $R_1 = \{z : \ |z| \le r\}$ como en $R_2 = \{z : \ |z| \ge \frac{1}{r}\}$.)

c) $(f_n)_{n=1}^\infty$ no converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \neq 1\}$.

37) Consideremos la serie funcional compleja $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+\sqrt{n})z^n$.

a) Demuestre que la serie converge uniformemente en todo subconjunto compacto del disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

b) Deduzca que la suma de la serie es una función continua en $\mathbb{D}$.

38) ¿Para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ convergen las siguientes series?

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$.

Razone la respuesta, aplicando los criterios adecuados (la condición necesaria para la convergencia, el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme, etc.).

(**Ayuda**: En el último apartado, se aconseja relacionar la convergencia dentro del disco unidad abierto, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, con la convergencia en el dominio exterior $\{z : |z| > 1\}$, observando que z pertence al segundo conjunto si y sólo si $1/z \in \mathbb{D}$.

Funciones holomorfas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

39) ¿En qué conjuntos abiertos del plano son holomorfas las siguientes funciones? ¿Cuál es su derivada en dichos puntos?

a) $\dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)}$, **b)** $\dfrac{1}{z+\frac{1}{z}}$, **c)** $\dfrac{z}{z^n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

40) Sea Ω un dominio (conjunto abierto y conexo) en $\mathbb{C}$, simétrico respecto al eje real, y g una función holomorfa en Ω. Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) La función $f(z) = \overline{g(\overline{z})}$ es holomorfa en Ω (es decir, tiene derivada compleja en todos los puntos del dominio).

b) La función $f(z) = g(\overline{z})$ tiene derivada compleja en un punto $a \in \Omega$ si y sólo si $g'(\overline{a}) = 0$.
(**Sugerencia**: En ambos apartados, es suficiente usar la definición de la derivada.)

41) ¿En qué puntos del plano son derivables (en el sentido complejo) las siguientes funciones?

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + ixy$; **b)** $f(z) = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y$; **c)** $z \operatorname{Re} z$.

42) Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, simétrico respecto al eje real, y g una función holomorfa en Ω. Sabiendo que la función $f(z) = g(\overline{z})$ es también holomorfa en Ω, use las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar la función f.

43) Sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$.

a) Si f toma sólo valores reales, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, demuestre que f es constante.

b) Demuestre que si $g = |f|$ es holomorfa en Ω, entonces f es constante.

(**Comentario**. Más adelante, demostraremos el *teorema de la aplicación abierta*, que expresa un hecho todavía más fuerte: para toda función f, holomorfa y no constante en un dominio Ω, la imagen $f(\Omega)$ es otro dominio.)

c) Si $h = |f| + f^3$ es holomorfa en Ω, demuestre que f es constante.