Variable Compleja I CURSO 2019-20

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 2 DE PROBLEMAS

Conjuntos en el plano y los números complejos

17) ¿Cuando son colineales tres puntos z_1, z_2, z_3, distintos dos a dos? Encuentre una condición analítica sencilla.

18) Este ejercicio recoge algunas relaciones entre los números complejos y las rectas en el plano.

a) Compruebe que la ecuación $\mathrm{Re}(az+b) = 0$, con $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, define una recta en el plano y que, recíprocamente, cada recta viene descrita por una ecuación de este tipo.

b) Encuentre los números a, b para que la recta pase por dos puntos dados z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

c) Demuestre que las rectas determinadas por las ecuaciones $\mathrm{Re}(az+b) = 0$ y $\mathrm{Re}(cz+d) = 0$, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $\mathrm{Re}(a\overline{c}) = 0$.

d) Demuestre que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados z_1 y z_2, puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

19) Resuelva las siguientes ecuaciones (donde $z \in \mathbb{C}$):

a) $(z+1)^4 + i = 0$; **b)** $\mathrm{Re}(z^2+5) = 0$; **c)** $\mathrm{Re}(z+5) = \mathrm{Im}(z-i)$.

20) Describa el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

a) $|z-2| - |z+2| > 3$, **b)** $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z < 1$, **c)** $|2z| > |1+z^2|$, **d)** $\mathrm{Im}\, \dfrac{1}{z+i} = 0$.

21) Determine las ecuaciones complejas:

a) de la parábola con foco i y directriz $\mathrm{Im}\, z = -1$.

b) de la elipse con focos ± 1 que pasa por i.

c) de la hipérbola con focos ± 1 que pasa por $1+i$.

22) Dibuje el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

a) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = 0$; **b)** $\left|z^2 - 4z + 4\right| = 4$; **c)** $\left|z^2 - 2z - 1\right| = 2$.

23) Halle razonadamente el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto de números reales (y explique, en ambos casos, si se alcanzan el máximo y/o el mínimo):

a) $\{|z^{12} - a| : \ z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, donde $a \in \mathbb{C}$ es un número fijo.

b) $\left\{\mathrm{Re}(iz^4 + 1) : \ |z| < \sqrt{2}\right\}$.

24) Demuestre que, dados $a, c \in \mathbb{C}$, la condición necesaria y suficiente para que exista $z \in \mathbb{C}$ que verifique $|z+a| + |z-a| = 2|c|$ es que sea $|a| \leq |c|$.
Ayuda: Si $\lambda > 0$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+a| + |z-a| = 2\lambda\}$ es una elipse si $\lambda > |a|$, un segmento si $\lambda = |a|$ y el conjunto vacío si $\lambda < |a|$.

25)* Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que $\{z_1, z_2, z_3\}$ sean los vértices de un triángulo equilátero es que

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Ayuda: Considere los puntos $w_1 = z_2 - z_1$, $w_2 = z_3 - z_2$, $w_3 = z_1 - z_3$.

26) Dados dos vértices, z_1 y z_2, de un triángulo equilátero, calcule el tercer vértice, z_3, de dos maneras distintas.

Topología del plano y del plano extendido. La esfera de Riemann

27) Demuestre que la sucesión $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite para ningún número $z \neq 1$ con $|z| = 1$.

28) Decida razonadamente cuál de las siguientes sucesiones tienen límite (finito o infinito):

$$z_n = \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n, \qquad w_n = n^{5/4} \operatorname{sen} \frac{1}{n} + i \operatorname{sen} n, \qquad \zeta_n = \left(\frac{4-3i}{5}\right)^n + \frac{1}{(3-i)^n}.$$

29) Sea $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$ la proyección estereográfica, que asocia a cada punto Z de la esfera unidad $\mathbb{S}^2$ (conocida también como *esfera de Riemann*) distinto de $N = (0,0,1)$ con el único punto $z \in \mathbb{C}$ (identificado con $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$) tal que N, Z y z están alineados.

a) Halle las imágenes por la transformación inversa P^{-1} (en la esfera de Riemann) de los conjuntos definidos por las siguientes desigualdades:

i) $\operatorname{Im} z = 0$, **ii)** $\operatorname{Re} z < 1$, **iii)** $|z| < 1$, **iv)** $|z| > 2$.

b) Demuestre que P transforma las circunferencias sobre la esfera en circunferencias o rectas del plano.

c) ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

30) En el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definemos la *métrica cordal* como sigue: dados dos puntos z, $w \in \hat{\mathbb{C}}$, sean $P = (x_1, x_2, x_3)$ y $Q = (y_1, y_2, y_3)$ los puntos correspondientes en la esfera de Riemann; definamos entonces la distancia $d(z, w)$ como la distancia euclídea entre P y Q en $\mathbb{R}^3$. Se pide demostrar lo siguiente.

a) $d(z, w) = \dfrac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$, para z, $w \in \mathbb{C}$.

b) $d(z, \infty) = \dfrac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)}}$, para $z \in \mathbb{C}$.

c) Aunque la distancia d define la misma topología en $\mathbb{C}$ que la métrica habitual, $(\mathbb{C}, d)$ no es un espacio métrico completo. (Se pide dar un ejemplo de una sucesión de Cauchy explícita que no sea convergente en dicha métrica.)

31) Dado un número c, consideramos la sucesión z_n definida por la siguiente recurrencia:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad z_0 = 0$$

a) Pruebe que si $|c| > 2$, entonces $z_n \to \infty$.

Ayuda: Verifique por inducción que si definimos $R = |c| - 1$, entonces $|z_n| \geq |c| R^{n-1}$ para $n \geq 1$.

b)* Demuestre que si, para algún k, $|z_k| > 2$, entonces $z_n \to \infty$.
Nota: El conjunto de Mandelbrot $\mathscr{M}$, estudiado en la dinámica compleja, es el conjunto de los $c \in \mathbb{C}$ para los que la correspondiente sucesión z_n no tiende a ∞. El apartado (a) demuestra que $\mathscr{M} \subset \overline{D}(0,2)$.