Variable Compleja I **CURSO 2019-20**

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 1 DE PROBLEMAS

Los números complejos: operaciones algebraicas y propiedades básicas

1) Realice las operaciones con números complejos indicadas abajo, calculando explícitamente las partes real e imaginaria del resultado:

a) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}$, **b)** $(i-\sqrt{2})^2$, **c)** $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$, **d)** $(1+i\sqrt{3})^3$.

2) Calcule los valores

a) $|(2-i)(1+i)^4|$, **b)** $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{4-3i}\right|$, **c)** $\sum_{k=1}^{2020} i^k$.

3) Compruebe la identidad $|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2=(1+|z|^2)(1+|w|^2)$, para todo $z,\ w\in\mathbb{C}$.

4) Demuestre la *identidad de Lagrange*: si $z_1,z_2,\dots,z_n$ y $w_1,w_2,\dots,w_n$ son números complejos, entonces

$$\Big(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\Big)-\Big|\sum_{j=1}^n z_j\,w_j\Big|^2=\sum_{1\le i<j\le n}\big|z_i\,\overline{w_j}-z_j\,\overline{w_i}\big|^2.$$

¿Qué consecuencia tiene esta identidad?

5) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $a,b\in\mathbb{C}$ y $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\overline{(a/b)}\}$ con $|z|=1$, entonces se cumple $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$.

b) Si $|a|<1$, entonces $|z|<1$ es equivalente a $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$.

6) **a)** Demuestre que las raíces de la ecuación cuadrática z^2+z+4 no pueden estar en el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}=\{z:\ |z|\le 1\}$, sin calcular dichas soluciones.

b) Demuestre que si $|a|<1$ y $|z|<1$, entonces $1-\overline{a}z\ne 0$ y observe su relevancia en el ejercicio anterior.

Representación polar. Fórmula de de Moivre

7) Sea $z=x+yi\ne 0$ un número complejo. Compruebe que su argumento principal $\operatorname{Arg} z$, elegido en el intervalo $(-\pi,\pi]$, puede expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{si } x>0,\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi, & \text{si } x<0 \text{ e } y\ge 0,\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi, & \text{si } x<0 \text{ e } y<0,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x=0 \text{ e } y>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x=0 \text{ e } y<0,\end{cases}$$

8) Utilice las representaciones polares de $1+i$ y $1+i\sqrt{3}$ para calcular el valor de $\cos\frac{5\pi}{12}$.

9) Calcule los valores de

a) $(1+i)^{14}$, **b)** $(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12})^{20}$.

10) Calcule los valores de

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{401}$, **b)** $\left(\frac{1}{1-i}\right)^{2020}+\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2020}$, **c)** $(1+i)^n+(1-i)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

11) Demuestre que:

a) $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

b) Para cualquier $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ tal que $\operatorname{tg}(n\theta)\neq 0$ se cumple que

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}(n\theta)}{1-i\operatorname{tg}(n\theta)}.$$

Raíces complejas

12) Calcule todos los valores de

a) $\sqrt[4]{-16}$, **b)** $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, **c)** $\sqrt[4]{1-i}$, **d)** $(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{1/3}$.

13) Demuestre que si ζ es una solución de $z^n=\mu$ (con $\mu\in\mathbb{C}$ fijo), entonces todas las soluciones son $\zeta\omega_0,\zeta\omega_1,\zeta\omega_2,\ldots,\zeta\omega_{n-1,}$ donde $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}$, son las raíces n-ésimas de la unidad. Después encuentre razonadamente las soluciones de $z^6-8=0$.

14) En este ejercicio, consideraremos sólo el *valor principal de la raíz cuadrada*, definido como $\sqrt[(p)]{z}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$ cuando $z=r\,(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ con $-\pi<\theta\leq\pi$. Claramente, $(\sqrt[(p)]{z})^2=z$. Demuestre que las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2+bz+c=0$, con $a\neq 0$, son

$$z=\frac{-b\pm\sqrt[(p)]{b^2-4ac}}{2a}.$$

15) Resuelva (en $\mathbb{C}$) la ecuación $\overline{z}=z^{n-1}$, donde $n\in\mathbb{N}$.

16) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $z\neq 1$ entonces $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

b) Si $\omega\neq 1$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=0,\qquad 1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{n}{\omega-1}.$$

c) Si $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\neq 0$, entonces

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right),$$

y

$$\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}2\theta+\cdots+\operatorname{sen}n\theta=\frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Ayuda: Use el apartado a) con $z=e^{i\theta}$.