Variable Compleja I 3^{o} **de Matemáticas /** 4^{o} **de Doble Titulación**

EXAMEN PARCIAL, MARZO DE 2020 - ERRORES COMUNES O IMPORTANTES

Señalamos abajo los errores más comunes o algunos llamativos observados en el primer parcial. Por supuesto, si alguien tiene alguna duda sobre su puntuación o la corrección aplicada, puede escribir al profesor de su grupo para hacer la revisión a través del correo electrónico o Moodle.

1. [2,5 **puntos**] Calcule razonadamente el valor de

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{303}.$$

Observaciones. El dominio de la trigonometría elemental es imprescindible para lo más básico de esta asignatura. Un error común (y bastante inesperado a estas alturas) ha consistido en identificar incorrectamente el argumento de $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ como $\pi/6$ en lugar de $\pi/3$. Eso conllevaba una penalización importante.

Otro error en algunos exámenes, a la hora de encontrar el argumento, ha sido escribir que $-\pi/3 = 5\pi/3$, lo cual obviamente no es cierto (si lo que se pretende es indicar que son congruentes módulo 2π, entonces hay que decirlo explícitamente). Lo que sí es cierto es que

$$e^{-\pi i/3} = e^{5\pi i/3}$$

pero eso ya es una fórmula distinta.

En varios exámenes no se ha desarrollado la respuesta hasta el final. También hubo personas que no lograron identificar los valores como $\cos(202\pi)$ y similares o que tuvieron otros problemas con las congruencias módulo 2 ó 3. Todo eso conllevaba una penalización importante.

En muchos casos se ha obtenido un resultado final como 2^{303} o similar, lo cual es un error serio porque habría que haberse dado cuenta, al menos, de que el número considerado en el ejercicio debía tener módulo uno y, por tanto, no podía ser tan grande.

2. [2,5 **puntos**] Determine el lugar geométrico de los puntos z en el plano que satisfacen la desigualdad

$$|1+z|^2 < |1-z|^2 - |z|^2 < 5$$

y represéntelo de forma gráfica.

Observaciones. El problema más grave ha sido realizar mal los cálculos con las expresiones del módulo al cuadrado, que han llevado a no identificar correctamente los conjuntos que resultan de cada desigualdad.

Menos graves pero frecuentes han sido los errores que, habiendo identificado bien que se trata de la intersección de un semiplano con un disco, se producían al poner como solución semiespacios o discos que no eran los correctos.

3. [2,5 **puntos**] Determine razonadamente todos los puntos del plano en los que es $\mathbb{C}$-diferenciable la función compleja

$$f(z) = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{2} + i|z|^2$$

y calcule la derivada $f'(z)$ en esos puntos.

Observaciones. En la mayoría de los casos, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se ha llegado a la conclusión correcta de que f es derivable sólo en los puntos de la recta $\{(x,y) : x = y\}$. Los errores, en su mayoría, se han producido después a la hora de calcular $f'(z)$.

Para hacerlo correctamente, era necesario usar la fórmula vista en clase:

$$f'(z) = u_x(z) + i\, v_x(z)\,.$$

Otros procedimientos, en general, no son correctos.

Un error común ha sido razonar así:

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(x^2 + y^2) = 2x^2 i$$

deduciendo esta última igualdad de la condición $x = y$, para concluir que $f'(z) = 2xi$, lo cual es erróneo. Al igual que en Cálculo, no se puede primero evaluar la función sustituyendo valores especiales en la fórmula que la define y luego derivar; hay que hacerlo precisamente en orden inverso.

4. [2,5 **puntos**] Demuestre que la serie funcional compleja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2 + z^n}$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos del disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. ¿Es la suma de la serie una función continua en $\mathbb{D}$? Explique la respuesta.

Observaciones. La primera parte (convergencia) valía $1'5$ puntos y la segunda (continuidad) un punto. En la segunda parte se exigía una justificación muy precisa (véanse las soluciones) y es muy probable que en un examen cercano a perfecto pero sin ser un 10 se haya perdido alguna décima justo allí.

Un error muy grave que hemos encontrado con cierta frecuencia ha sido el escribir desigualdades para números complejos (sin módulos) como, por ejemplo,

$$\frac{z^n}{2 + z^n} \le \frac{r^n}{2 - r^n}\,.$$

(Podríamos haber puntuado con 0 el ejercicio entero al ver esto pero aún así hemos concedido crédito parcial por el resto de la solución si algo estaba bien.) Como ya comentamos en clase, una desigualdad de este tipo no tiene ningún sentido ya que entre los números complejos no existe ningún orden natural compatible con el orden entre los reales y con la topología usual del plano. Por la misma razón, tampoco se puede escribir $\sum_n \frac{z^n}{2+z^n} < \infty$. Sólo tiene sentido escribir

$$\left|\frac{z^n}{2+z^n}\right| \le \frac{r^n}{2-r^n} \qquad \text{o} \qquad \sum_n \left|\frac{z^n}{2+z^n}\right| \le \sum_n \frac{r^n}{2-r^n}\,.$$

Algunos estudiantes han dado la estimación correcta

$$\left|\frac{z^n}{2+z^n}\right| \le \frac{r^n}{2-r^n}$$

para luego señalar que $\frac{r^n}{2-r^n} \to 0$, algo que es irrelevante para la convergencia de la serie porque no permite llegar a ninguna conclusión. Este error no se ha penalizado, salvo unos pocos casos relacionados con otros fallos, pero sí se ha penalizado seriamente si se ha concluido de ahí que $\sum_n \frac{r^n}{2-r^n}$, converge. Se trata de un error muy grave pues ya sabemos de Cálculo I que la convergencia del término general de una serie a cero no implica la convergencia de la serie. Otro error grave ha sido confundir la serie dada con una serie de potencias.

Hay estimaciones mejores que $\left|\frac{z^n}{2+z^n}\right| \le \frac{r^n}{2-r^n}$ (como, por ejemplo, $\left|\frac{z^n}{2+z^n}\right| \le \frac{r^n}{2-r} < r^n$ que son más manejables y cuya convergencia es mucho más fácil de justificar) pero una vez utilizada la serie $\sum_n \frac{r^n}{2-r^n}$, era absolutamente necesario justificar su convergencia. En algunos exámenes directamente no se ha justificado y en otros se ha justificado incorrectamente. Obviamente, eso llevaba una penalización de, al menos, medio punto. El test del cociente para las series positivas funciona en este caso pero en algunos exámenes se ha calculado mal el límite de la raíz n-ésima. Asimismo, era necesario mencionar el criterio de mayorante (o el M-test) de Weierstrass para la convergencia uniforme; omitir su mención también suponía cierta penalización.

En la última parte no procedía hacer ninguna estimación con $\varepsilon - \delta$ ni usar la definición de convergencia uniforme (véase la solución). Afirmar que no se puede deducir la continuidad en el disco porque la convergencia no es uniforme en todo el disco es un error serio. (Ya hemos visto ejemplos similares en clase y en las hojas de problemas.)

Había que probar primero la continuidad en los subconjuntos compactos del disco y luego explicar cuidadosamente por qué eso implica que la función es continua en todo el disco. Para ello, fijado un punto, es importante encontrar un entorno abierto de ese punto en el que la función sea continua. No basta con decir que existe un compacto que contiene al punto en cuestión, porque el punto podría estar en la frontera del compacto y entonces no podríamos acercarnos a él por todas las direcciones posibles.