Variable Compleja I **3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

EXAMEN PARCIAL, MARZO DE 2020

NOMBRE ______________ APELLIDOS ______________

D.N.I. / PASAPORTE ______________ FIRMA ______________

Se pide justificar todas las respuestas de manera breve pero clara y detallada, explicando qué resultados se han usado y dónde.

1. [2,5 **puntos**] Calcule razonadamente el valor de

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{303}.$$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{303} = \left(\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}\right)^{303} = \left(\frac{e^{\pi i/3}}{e^{-\pi i/3}}\right)^{303}$$

$$= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{303} = e^{101\cdot 2\pi i}$$

$$= \left(e^{2\pi i}\right)^{101} = 1^{101} = 1$$

(o, directamente, $= \cos(202\pi) + i\,\mathrm{sen}(202\pi) = 1$), usando la fórmula de A. de Moivre.

2. [2,5 **puntos**] Determine el lugar geométrico de los puntos z en el plano que satisfacen la desigualdad

$$|1+z|^2 < |1-z|^2 - |z|^2 < 5$$

y represéntelo de forma gráfica.

Por las propiedades conocidas del módulo y de la conjugación,

$$|1+z|^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 1+2\operatorname{Re} z + |z|^2,$$

$$|1-z|^2 = 1-2\operatorname{Re} z + |z|^2,$$

$$|1-z|^2 - |z|^2 = 1-2\operatorname{Re} z.$$

Nuestra doble desigualdad es equivalente a

$$1+2\operatorname{Re} z + |z|^2 < 1-2\operatorname{Re} z < 5$$

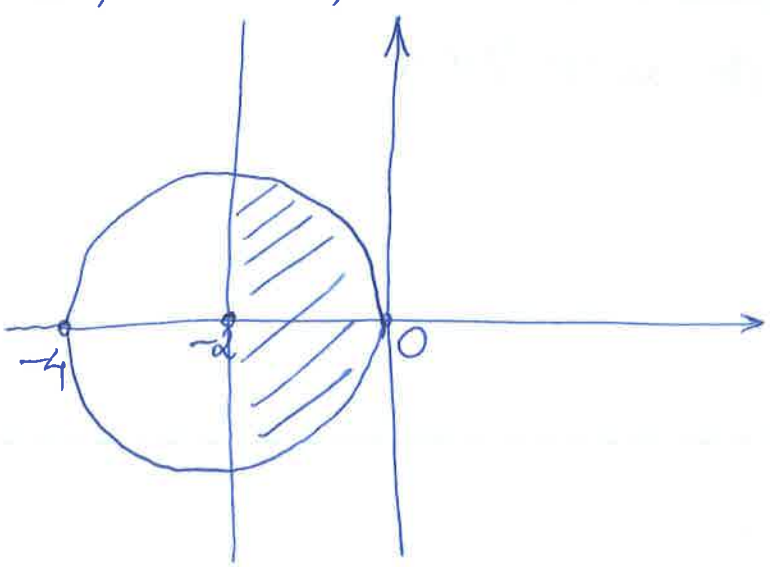
$$\Leftrightarrow \quad 4\operatorname{Re} z + |z|^2 < 0 \quad y \quad \operatorname{Re} z > -2$$

(en coordenadas euclídeas, $z = x+yi$, $\operatorname{Re} z = x$, $|z|^2 = x^2+y^2$)

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+4x < 0 \quad y \quad x > -2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2+y^2 < 4 \quad y \quad x > -2.$$

Por tanto, el lugar geométrico indicado es la intersección del disco de centro $(-2,0) \cong -2$ y radio 2 y del semiplano $\operatorname{Re} z = x > -2$; es decir, es un semidisco abierto.



3. [2,5 **puntos**] Determine razonadamente todos los puntos del plano en los que es $\mathbb{C}$-diferenciable la función compleja

$$f(z) = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{2} + i|z|^2$$

y calcule la derivada $f'(z)$ en esos puntos.

Escribiendo $z = x+yi$, $\overline{z} = x-yi$, $|z|^2 = x^2+y^2$ y

$f(z) = u(z)+iv(z)$, vemos que

$$\frac{z^2+\overline{z}^2}{2} = \frac{(x^2-y^2+2xyi) + (x^2-y^2-2xyi)}{2} = x^2-y^2 = u(x,y)$$

$$|z|^2 = x^2+y^2 = v(x,y).$$

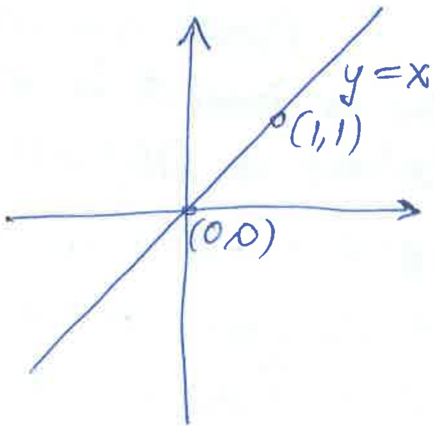
Ambas $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son funciones polinómicas de $\underline{x}$ e $\underline{y}$ y, por tanto, son de clase $C^1(\mathbb{C}) \cong C^1(\mathbb{R}^2)$, luego son $\mathbb{R}$-diferenciables en todo el plano. Por un teorema visto en clase, f será $\mathbb{C}$-diferenciable precisamente en aquellos puntos donde satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$(C\text{-}R): \left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l} 2x = 2y \\ -2y = -2x \end{array}\right\} \iff x = y.$$

Conclusión: f es $\mathbb{C}$-diferenciable en los puntos de la recta

$\{(x,y) : x = y\} = \{z : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$

y sólo en ellos.



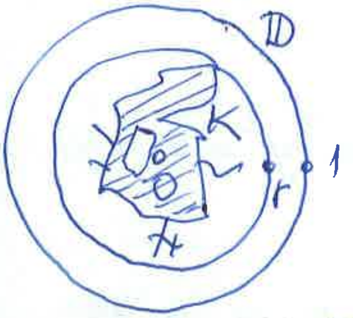
La derivada de f en esos puntos es

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 2x + 2xi = 2x(1+i)$$
$$= 2(1+i)\operatorname{Re} z.$$

4. [2,5 **puntos**] Demuestre que la serie funcional compleja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2+z^n}$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos del disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. ¿Es la suma de la serie una función continua en $\mathbb{D}$? Explique la respuesta.



Sabemos de clase que $\forall K \subset \mathbb{D}$ (subconjunto compacto de $\mathbb{D}$) $\exists r$ t.q. $0<r<1$ y $\forall z \in K$, $|z| \leq r$.

La desigualdad triangular inversa nos dice que

$$|2+z^n| \geq 2-|z^n| \geq 2-r^n > 1 \qquad (\text{al ser } r^n<1)$$

y, por tanto,

$$\left|\frac{z^n}{2+z^n}\right| \leq r^n, \quad \forall z \in K.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es geométrica con razón r, $0<r<1$, y, por tanto, convergente. El Criterio de Weierstrass implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2+z^n}$ converge uniformemente en K.

Puesto que cada $z \in \mathbb{D}$ pertenece a un $K \subset \mathbb{D}$, se sigue que la suma de la serie existe para todo $z \in \mathbb{D}$. Es una función continua en $K \subset \mathbb{D}$ puesto que $f_n(z) = \frac{z^n}{2+z^n} \in C(K)$, luego también lo son las sumas parciales $\sum_{n=1}^{N} f_n(z) = S_N(z)$. Por un teorema visto en clase, la suma de la serie es continua en K, por ser límite uniforme de las funciones continuas S_N.

La suma es continua en todo $K \subset \mathbb{D} \Rightarrow$ es continua en todo punto $z \in \mathbb{D}$ (por ejemplo, si $r>0$ y $\overline{D}(z,r) \subseteq \mathbb{D}$, entonces la suma es continua en $\overline{D}(z,r)$ y, por tanto, en $\mathbb{D}$).