Variable Compleja I (16449), **2019-2020** (Segundo Cuatrimestre)

Tercer curso de Grado en Matemáticas y Cuarto de Doble Grado Matemáticas - Ing. Informática

Contenido y preguntas modelo para el tercer examen parcial del día 18 de mayo de 2020

El contenido del tercer y último examen parcial cubrirá el material correspondiente a las hojas de problemas de 7 a 9, ambas inclusive, para las que se han distribuido los apuntes y se están distribuyendo varias respuestas y/o soluciones.

Por supuesto, se requerirá cierto dominio de todo el material visto previamente en clase, allá donde se necesite su uso. En cuanto al material reciente, serán necesarios los siguientes conocimientos para el segundo examen parcial:

- El conocimiento y uso efectivo de la fórmula de Green, del Teorema integral de Cauchy y de la Fórmula integral de Cauchy (tanto para la función como para sus derivadas).
- El conocimiento del índice de una curva respecto de un punto y el manejo de la función primitiva de una función holomorfa en un dominio simplemente conexo.
- El conocimiento y manejo en ejercicios de las propiedades de los ceros de una función analítica, así como del Principio de los ceros aislados y del Teorema de unicidad para las funciones holomorfas.
- El conocimiento de la clasificación de las singularidades aisladas y del cálculo del residuo de una función en una singularidad, acorde con su tipo.
- El desarrollo en serie de Laurent de una función analítica en una corona.
- El conocimiento del Teorema de los residuos y sus aplicaciones al cálculo de integrales de funciones trigonométricas y de diversas integrales impropias básicas, incluidas las estimaciones de integrales de línea pertinentes.
- El conocimiento del Principio del argumento y la habilidad de aplicar en situaciones concretas el teorema de Rouché.
- El conocimiento y buen uso en ejemplos del Teorema de la aplicación abierta y el Principio del módulo máximo, así como del Lema de Schwarz y de las propiedades de los automorfismos del disco unidad.

Finalmente, incluimos algunas preguntas modelo para practicar.

A. Sea f una función holomorfa en la corona $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ cuya serie de Laurent allí es

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} + \frac{e}{z^2} + 1 - z^4 + \pi z^7 .$$

Entonces $\mathrm{Res}(f;0) = e$.

VERDADERO FALSO

B. Denotando por C a la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con orientación positiva, tenemos que

$$\int_C \frac{\operatorname{sen} z - \cos z}{(z - \frac{\pi}{4})^2}\, dz = 2\pi i \sqrt{2} .$$

VERDADERO FALSO

C. Todo automorfismo del disco que fija el origen es una rotación.

VERDADERO FALSO

---

1. El número de ceros de la función $f(z) = z^5 - 10z + 5$ en la corona $\{z : 1 < |z| < 2\}$ es igual a:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) otro valor.

---

2. El tipo de singularidad que tiene la función $f(z) = \dfrac{z^2}{\operatorname{sen}^4 z}$ en $z = 0$ es:

(a) evitable, (b) esencial, (c) un polo simple, (d) un polo doble, (e) no aislada.

---

3. Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Sólo uno de los siguientes conjuntos puede ser el conjunto de los ceros de una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y no constante. ¿Cual?

(a) $\{\frac{1}{e^n} : n \in \mathbb{N}\}$; (b) $\{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$; (c) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$; (d) $\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\}$; (e) $\{\sqrt[n]{n} - 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

---

4. Denotando por C a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} :, |z| = 1\}$ con orientación positiva, ¿cuáles de las siguientes integrales:

$$I = \int_\gamma \frac{e^{-z} - 1}{z}\, dz, \quad J = \int_\gamma \operatorname{sen} z\, dz, \quad K = \int_\gamma \frac{\cos z - 1}{z}\, dz$$

son iguales a 0?

(a) Sólo I y J, (b) todas, (c) ninguna, (d) sólo J y K, (e) sólo J.

---

5. Sólo uno de los siguientes conjuntos en el plano puede ser la imagen de un dominio Ω por una función holomorfa y no constante en Ω. ¿Cuál?

(a) $\mathbb{D} \cup \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}$; (c) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; (d) $\mathbb{R}$; (e) $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.
