Apuntes y ejercicios resueltos:

Integración compleja (Segunda parte): Teorema de los residuos y sus aplicaciones

Estas notas continúan el resumen anterior sobre los teoremas de Cauchy y sus aplicaciones.

Singularidades aisladas. Clasificación

Definición. Diremos que una función f tiene una *singularidad aislada* en el punto $z = a$ si f es holomorfa (analítica) en $\{z \in \Omega : z \neq a\}$, siendo Ω un conjunto abierto que contiene al punto a. Esto es equivalente a la condición de que f sea holomorfa en un disco agujereado $D^*(a;r) = D(a;r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$.

Existen tres posibilidades en cuanto al comportamiento de f cerca de la singularidad aislada en $z = a$:
(1) f está acotada en algún disco agujereado $D^*(a;R)$, donde $0 < R \le r$.
(2) $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ (pensando en términos de los números reales: $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$.);
(3) no se cumple ninguna de las condiciones (1) y (2).
En el caso (1) diremos que f tiene una *singularidad evitable* en a, en el caso (2), que tiene un *polo* en a y, en el caso (3), que f tiene una *singularidad esencial* en a.

El nombre "singularidad evitable" está justificado por el siguiente teorema (demostrado en clase):

Teorema de Riemann sobre la singularidad evitable. *Si f está acotada en algún disco agujereado $D^*(a;\rho)$, donde $0 < \rho \le r$, entonces, de hecho, existe el límite finito $L = \lim_{z\to a} f(z)$ y se cumple aún más: la función extendida (obviamente continua en $D(a;\rho)$)*

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in D^*(a;\rho), \\ L, & \text{si } z = a \end{cases}$$

es, de hecho, holomorfa en $D(a;\rho)$.

Por tanto, una función holomorfa en un dominio Ω, salvo en un punto $a \in \Omega$ o en una cantidad finita de puntos en Ω (después de definir la extensión correspondiente), es a todos los efectos como una función holomorfa en todo Ω.

Ejemplo 1. (a) Debido a la cancelación, es obvio que la función

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z+1}$$

es igual a $z-1$ cuando $z \neq -1$. Puesto que $z-1$ tiene límite finito cuando $z \to -1$, concluimos que f tiene una singularidad evitable en dicho punto.

(b) Lo mismo sucede con la función

$$g(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}$$

ya que $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$. Esto se puede ver o bien 1) aplicando la versión compleja de la Regla de L'Hopital o bien 2) desarrollando la función seno en serie de Taylor, cancelando z^2 y tomando el límite.

Ejemplo 2. Las funciones

$$f(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)^2}\,, \qquad g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

tienen polos, respectivamente, en $z = 1$ y en $z = 0$. Obsérvese que no hay cancelaciones en la fracción que representa la función f.

La función f no tiene otros polos. Sin embargo, la función g tiene una cantidad numerable de polos. Se trata de los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Esto se puede ver como sigue: la ecuación $\operatorname{sen} z = 0$ significa, según la definición de la función compleja seno, que

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0\,.$$

Esta condición es equivalente a $e^{iz} = e^{-iz}$ y, por tanto, a $e^{2iz} = 1$. Ya sabemos que dos números complejos coinciden sólo si coinciden sus módulos y sus argumentos son iguales (módulo 2π) así que $2iz = 2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$, es decir, $z = \pi n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Es claro que todos esos valores tienen el seno igual a cero.

Proposición. Hemos demostrado en clase que toda f con un polo en $z = a$ puede escribirse como

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m}$$

para un único número natural m, donde F es analítica en el dominio Ω y $F(a) \neq 0$. Equivalentemente, hay un único m tal que existe $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ (finito). Para los valores $n < m$ se tiene que $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \infty$ y para los $n > m$ se cumple $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = 0$.

Definición. El número m arriba mencionado se llama el *orden* del polo $z = a$. Si $m = 1$, hablamos de un *polo simple* y si $m = 2$, de un *polo doble* en $z = a$.

Ejemplo 3. La función f del Ejemplo **2** tiene un polo doble en $z = 1$, ya que

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1}(z^2-2) = -1 \neq 0\,, \infty\,.$$

Obsérvese que $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \infty$, mientras que $\lim_{z\to 1}(z-1)^3 f(z) = 0$.

En el caso de la función g del mismo ejemplo, el polo en $z = 0$ es simple ya que

$$\lim_{z\to 0} z\,g(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z = 1\cdot\cos 0 = 1\,.$$

Ejemplo 4. La función $e^{1/z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad esencial, ya que no está acotada en ningún entorno del origen ni tampoco tiende al infinito cuando $z \to 0$. Por ejemplo:

- la sucesión $z_n = 1/n \to 0$ y $f(z_n) = e^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$;
- la sucesión $\zeta_n = -1/n \to 0$ pero $f(\zeta_n) = e^{-n} \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- la sucesión $w_n = 1/(2\pi ni)$ también tiende a 0 cuando $n \to \infty$; sin embargo, $f(w_n) = e^{2\pi ni} = 1 \to 1$.

Este comportamiento es típico de una función analítica (holomorfa) cerca de una singularidad esencial, debido al siguiente resultado.

Teorema de Casorati-Weierstrass. *Si f tiene en $z = a$ una singularidad esencial, entonces para todo $w \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ existe una sucesión $(z_n)_n$ tal que $z_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.*

Series de Laurent

Teorema. Si f es holomorfa en $D^*(a;r)$, se puede desarrollar en serie de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

que converge absoluta y uniformemente en cada circunferencia $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$, $0 < \rho < r$.

Definición. Esta serie se denomina la *serie de Laurent* de f alrededor de a. La suma $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ se suele llamar la *parte principal* de la serie de Laurent.

(Como se ha comentado en clase, existen otros tipos de series de Laurent, convergente en otras coronas de tipo $\{z : r_1 < |z-a| < r_2\}$, pero no las trataremos aquí por falta de espacio.) La forma que tiene la serie de Laurent se corresponde con el tipo de singularidad aislada, según la siguiente clasificación:

- Cuando $z = a$ es una singularidad evitable, la parte principal es nula. En otras palabras, la serie de Laurent coincide con la de Taylor, que converge en todo el disco $D(a;r)$.
- Cuando $z = a$ es un polo de orden m, la parte principal se reduce a la suma finita $\sum_{n=-m}^{-1} c_n (z-a)^n$, siendo $c_{-m} = \lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$.
- Cuando $z = a$ es una singularidad esencial, la parte principal tiene infinitos términos no nulos.

Ejemplo 5. Como ya sabemos, la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable. Su serie de Laurent alrededor del origen es

$$\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

y, evidentemente, converge en todo el plano. La convergencia es uniforme en cada circunferencia centrada en el origen.

Ejemplo 6. La función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ tiene un polo simple en $z = 0$. Su serie de Laurent alrededor del origen puede obtenerse a partir del desarrollo de la serie geométrica, convergente en el disco unidad:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots,$$

siendo la parte principal simplemente $\frac{1}{z}$. La serie de Laurent obviamente converge en el disco unidad agujereado, $D^*(0;1) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, siendo la convergencia uniforme y absoluta en cada circunferencia contenida en este dominio.

Ejemplo 7. La serie de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ se obtiene fácilmente del desarrollo de Taylor de la función entera e^w:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

convergente absolutamente para todo w complejo y uniformemente en cada subconjunto compacto del plano. Sustituyendo $w = 1/z$, se obtiene una serie en z convergente en todo $z \neq 0$:

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^k}{(-k)!},$$

después del evidente cambio de índice $k = -n$.

Residuos: definición y cálculo

Proposición. Consideremos una función f analítica en un conjunto abierto Ω, salvo en una singularidad aislada, $z = a$. (Sabemos que entonces f es analítica en un disco agujereado $D^*(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z-a| < r\}$.) Sea ρ un número tal que $0 < \rho < r$ y C_ρ la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| = \rho\}$ con orientación positiva. Entonces el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(z)\,dz$$

no depende de ρ; es decir, es el mismo para todo $\rho \in (0,r)$.

Definición. El valor constante de las integrales de arriba se denomina el *residuo* de f en $z = a$. *Notación*: $\operatorname{Res}(f;a)$.

Observación. Cuando $z = a$ es una singularidad evitable de f, entonces $\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 0$ y, por lo tanto, $\operatorname{Res}(f;a) = 0$. En el caso de un polo o una singularidad esencial, el residuo puede ser no nulo.

Fórmulas para el cálculo del residuo en un polo. Si $z = a$ es un polo simple de f, entonces

$$\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,.$$

Si a es un polo doble, entonces

$$\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}[(z-a)^2 f(z)]'\,.$$

Más generalmente, si es un polo de orden m, entonces

$$\operatorname{Res}(f;a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]\,.$$

Ejemplo 8. El residuo en el polo simple $z = 0$ de la función g del Ejemplo **2** es

$$\operatorname{Res}(g;0) = \lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\lim_{z\to 0}\cos z = 1\,.$$

El residuo en el polo doble $z = 1$ de la función f del Ejemplo **2** es

$$\operatorname{Res}(f;1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 1}[z^2-2]' = \lim_{z\to 1} 2z = 2\,.$$

Cálculo del residuo a partir de la serie de Laurent. Si una función holomorfa, f, tiene una singularidad aislada en $z = a$, hay un método universal para calcular $\operatorname{Res}(f;a)$.

Proposición. Si f tiene una singularidad aislada en $z = a$ y en $D^*(a;r)$ se desarrolla en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,,$$

entonces $\operatorname{Res}(f;a) = c_{-1}$. (Evidentemente, si la singularidad es evitable, tendremos $\operatorname{Res}(f;a) = 0$.)

Ejemplo 9. Consideremos de nuevo la función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ del Ejemplo **6**, con un polo simple en $z = 0$. Según la fórmula de arriba, vemos que $\operatorname{Res}(f;0) = c_{-1} = 1$.

Asimismo, para la función $e^{1/z}$ y su singularidad esencial en el origen. Utilizando la serie de Laurent de f obtenida en el Ejemplo **7**, también obtenemos $\operatorname{Res}(f;0) = c_{-1} = 1$.

Teorema de los residuos

¿Cómo integrar a lo largo de un contorno una función con varias singularidades aisladas dentro de dicho contorno? La respuesta viene dada por el siguiente resultado fundamental.

Teorema de los residuos. *Sea Ω un dominio y γ un contorno contenido en Ω, junto con su dominio interior, $D_{\text{int}}(\gamma)$. Sea f una función analítica en Ω, salvo en las singularidades aisladas a_1, a_2,..., a_n, todas ellas contenidas en $D_{\text{int}}(\gamma)$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f;a_k)\,.$$

Obsérvese que la fórmula integral de Cauchy constituye el caso especial $n=1$ de este teorema (con un polo simple), mientras que la fórmula de Cauchy generalizada para la derivada de orden n corresponde al caso de un polo es de orden mayor que uno.

Ejemplo 10. *Siendo $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva, calcule*

$$\int_{\mathbb{T}} e^{1/z}\,dz\,.$$

Obviamente, $z=0$ es la única singularidad aislada de $f(z)=e^{1/z}$ en el plano. Ya sabemos del Ejemplo **7** que $\operatorname{Res}(e^{1/z};0)=1$. Por el Teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} e^{1/z}\,dz = 2\pi i\,.$$

Ejemplo 11. *Evalúe la integral*

$$I=\int_\gamma \frac{2\,dz}{4z^2-1}\,,$$

donde γ es la circunferencia unidad $\mathbb{T}=\{z: |z|=1\}$ con la orientación positiva.

Solución. El problema se puede resolver de distintas maneras. En una entrega anterior ya vimos una, usando fracciones simples para poder aplicar la Fórmula Integral de Cauchy. He aquí otra solución, vía el teorema de los residuos. La función

$$f(z)=\frac{2}{4z^2-1}=\frac{1}{2(z-1/2)(z+1/2)}$$

evidentemente tiene dos polos simples en el plano complejo: $a_1=1/2$ y $a_2=-1/2$, ambos dentro de la curva γ, que es simple, cerrada y C^1. Por tanto, aunque la fórmula integral de Cauchy no sea aplicable directamente, el *Teorema de los residuos* sí lo es:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f;a_1)+\operatorname{Res}(f;a_2)\right).$$

Para evaluar esos residuos, utilizamos la fórmula habitual para el residuo en un polo simple:

$$\operatorname{Res}(f;a_1)=\lim_{z\to 1/2}(z-1/2)f(z)=\lim_{z\to 1/2}\frac{1}{2(z+1/2)}=\frac{1}{2}\,.$$

De manera análoga, $\operatorname{Res}(f;a_2) = -\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}\,dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 12. Determine las singularidades aisladas de la función

$$f(z) = \frac{e^z}{\cos z - 1}$$

situadas dentro de la circunferencia $\gamma = \{z : |z-6| = 1\}$. Después calcule la integral $I = \int_\gamma f(z)\,dz$.

Solución. En primer lugar, las únicas singularidades de f son polos y son exactamente los puntos en los que $\cos z = 1$. Se trata de los puntos $z_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Esto se puede deducir como sigue. La ecuación $\cos z = 1$ significa que $e^{iz} + e^{-iz} = 2$, es decir, $e^{2iz} + 1 = 2e^{iz}$. La sustitución $w = e^{iz}$ nos da la ecuación cuadrática $w^2 + 1 = 2w$ cuya única solución es $w = 1$, es decir: $e^{iz} = 1$ y eso nos lleva a la conclusión deseada como en el Ejemplo **2**.

De todos estos puntos z_n, $n \in \mathbb{Z}$, sólo $z_1 = 2\pi \in (6,7)$ está dentro de la circunferencia γ, así que es el único a tener en cuenta. No sería fácil trabajar con la serie de Laurent alrededor de $z = 2\pi$ ya que el denominador no es un polinomio, así que calculamos el residuo de forma directa.

En primer lugar, comprobamos el orden de este polo. Veamos primero que no es simple. Recordemos que las funciones seno y coseno complejas también son periódicas con periodo 2π:

$$\cos(z-2\pi) = \cos z, \qquad \operatorname{sen}(z-2\pi) = \operatorname{sen} z.$$

Esto nos permite hacer el cambio de variable $w = z - 2\pi$ en el límite para simplificar los cálculos. Aplicando primero dicha periodicidad, luego el cambio de variable en el límite y, finalmente, la regla de L'Hopital, vemos que

$$\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)\frac{e^z}{\cos z - 1} = \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)e^z}{\cos(z-2\pi)-1} = \lim_{w\to 0} \frac{we^{w+2\pi}}{\cos w - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{e^{w+2\pi} + we^{w+2\pi}}{-\operatorname{sen} w} = \infty$$

puesto que el numerador tiende a $e^{2\pi}$ y el denominador a cero.

Veamos ahora que el polo es doble. Por el mismo procedimiento, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)^2\frac{e^z}{\cos z - 1} &= \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)^2 e^z}{\cos(z-2\pi)-1} = \lim_{w\to 0} \frac{w^2 e^{w+2\pi}}{\cos w - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{2we^{w+2\pi} + w^2 e^{w+2\pi}}{-\operatorname{sen} w} \\
&= -\lim_{w\to 0} 2e^{w+2\pi}\frac{w}{\operatorname{sen} w} - \lim_{w\to 0} we^{w+2\pi}\frac{w}{\operatorname{sen} w} = -2e^{2\pi}
\end{aligned}$$

ya que, como sabemos, $\lim_{w\to 0} \frac{w}{\operatorname{sen} w} = 1$.

Finalmente, podemos calcular el residuo usando la fórmula para el residuo en un polo doble y los razonamientos parecidos a los anteriores (aplicando L'Hopital dos veces y dividiendo la fraccción en dos):

$$\begin{aligned}
I &= \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;2\pi) = 2\pi i \lim_{z\to 2\pi}\left(\frac{(z-2\pi)^2 e^z}{\cos z - 1}\right)' \\
&= 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \frac{\left(2(z-2\pi)e^z + (z-2\pi)^2 e^z\right)(\cos z - 1) + (z-2\pi)^2 e^z \operatorname{sen} z}{-\operatorname{sen} z} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \frac{2(z-2\pi)e^z + (z-2\pi)^2 e^z}{\operatorname{sen} z}(1-\cos z) + 0 = 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \frac{2(z-2\pi)e^z + (z-2\pi)^2 e^z}{\operatorname{sen}(z-2\pi)}(1-\cos z) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to 2\pi}\left(2e^z(1-\cos z)\frac{(z-2\pi)}{\operatorname{sen}(z-2\pi)} + e^z(1-\cos z)(z-2\pi)\frac{(z-2\pi)}{\operatorname{sen}(z-2\pi)}\right) = 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

El teorema de los residuos tiene numerosas aplicaciones, tanto cuantitativas (cálculo de integrales) como cualitativas (para deducir los resultados como el principio del argumento, teorema de Rouch'e, teorema de la aplicación abierta o el principio del módulo máximo).

En el resto de estos apuntes veremos diversas aplicaciones de carácter cuantitativo.

Aplicacion del Teorema de los residuos a la integración de funciones trigonométricas en $[0, 2\pi]$

Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva. Podemos parametrizarla, escribiendo cada punto $z \in \mathbb{T}$ como

$$z = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Además, tal y como se ha visto en clase, se deduce de la fórmula de Euler que

$$z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t, \qquad z - \frac{1}{z} = e^{it} - e^{-it} = 2i \operatorname{sen} t.$$

Por consiguiente,

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad \operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

para los puntos $z = e^{it} \in \mathbb{T}$. Observemos que $dz = ie^{it}\,dt = iz\,dt$ y, por tanto, $dt = dz/(iz)$.

Cuando u es una función elemental de dos variables reales, todo esto nos permite escribir las diferentes integrales trigonométricas de la forma

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$$

como integrales de una función compleja sobre el contorno $\mathbb{T}$:

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = \int_{\mathbb{T}} u\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz},$$

transformando así la integral inicial de una función real en otra integral de una función de la variable z. En nuestros ejemplos, esta nueva función de z será analítica y con frecuencia racional, así que luego podremos aplicar la fórmula integral de Cauchy o el teorema de los residuos.

Ejemplo 13. *Calcule el valor de la integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 4\operatorname{sen} t}\,dt.$$

Solución. De manera similar a las deducción de las fórmula de arriba, también obtenemos

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right), \qquad z = e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Aplicando las fórmulas indicadas, se deduce que

$$I = \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \frac{2}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{\mathbb{T}} \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}\,dz$$

La función obtenida

$$f(z) = \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)}$$

tiene tres polos: un polo doble $z=0$ y dos simples: $z=2i$ y $z=i/2$. Esto es cierto porque $z=2i$ y $z=i/2$ son los ceros del polinomio $-2z^2+5iz+2$, lo cual permite la siguiente factorización:

$$-2z^2+5iz+2 = -2(z-\frac{i}{2})(z-2i)$$

y, por tanto,

$$f(z) = \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)} = \frac{z^4+1}{-4z^2(z-\frac{i}{2})(z-2i)}.$$

Dos de los polos se encuentran dentro de $\mathbb{T}$: el polo simple $i/2$ y el doble $z=0$. Aplicando las fórmula habituales para el cálculo del residuo en un polo (simple y doble, respectivamente), después de un poco de cálculo, obtenemos:

$$\mathrm{Res}\,(f;\frac{i}{2}) = \frac{17i}{24}, \qquad \mathrm{Res}\,(f;0) = \frac{-5i}{8}.$$

Por el teorema de los residuos, obtenemos

$$I = 2\pi i \cdot \left(\mathrm{Res}\,(f;\frac{i}{2}) + \mathrm{Res}\,(f;0)\right) = -\frac{\pi}{6}. \qquad \blacksquare$$

Para poder seguir con las aplicaciones cuantitativas, conviene recordar varias propiedades de las integrales de línea complejas vistas en clase.

Repaso: estimaciones básicas de integrales de línea

En lo que sigue, γ será una curva C^1 a trozos, parametrizada de la siguiente manera: $z=\gamma(t)$, $a\le t\le b$. Puede ser también simple y cerrada (lo que se suele llamar un contorno) o no. Ya hemos definido que $dz = \gamma'(t)\,dt$ y ahora acordemos que

$$|dz| = |\gamma'(t)|\,dt,$$

una cantidad siempre no negativa. Entenderemos, por tanto, que

$$\int_\gamma u(z)|dz| = \int_a^b u(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

En particular, poniendo $u\equiv 1$ y escribiendo $\gamma(t)=u(t)+iv(t)$, $\gamma'(t)=u'(t)+iv'(t)$, obtenemos

$$\int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[u'(t)]^2+[v'(t)]^2}\,dt = \ell(\gamma),$$

donde $\ell(\gamma)$ denota la longitud de la curva γ.

Proposición. Si γ es una curva C^1 a trozos, f una función continua en (la traza de) γ y M una constante tal que $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \gamma$ (por ejemplo, $M = \max_{z\in\gamma} |f(z)|$), entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \le M \int_\gamma |dz| = M \cdot \ell(\gamma)\,.$$

Utilizaremos esta propiedad con frecuencia, no sólo para acotar las integrales, sino fundamentalmente para demostrar que cuando el contorno depende de un número positivo R y $R \to +\infty$, entonces la integral $\int_\gamma f(z)\,dz \to 0$, lo cual será fundamental en el cálculo de distintas integrales reales.

Ejemplo 14. Denotemos por C_R a la semi-circunferencia, de radio R en el semiplano superior, centrada en el origen, desde R hasta $-R$. Demuestre que

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,.$$

<u>Solución</u>. Necesitamos una cota superior, M, para la función $1/(z^2+1)^2$ en C_R. Por tanto, debemos acotar el denominador $(z^2+1)^2$ inferiormente.

Cuando z pertenece a la semi-circunferencia C_R, tenemos $|z| = R$ y, aplicando una forma de la desigualdad triangular: $|a-b| \ge |a| - |b|$, con $a = z^2$, $b = -1$, obtenemos $|z^2+1| \ge |z^2| - 1 = R^2 - 1 > 0$. Por lo tanto, $|z^2+1|^2 \ge (R^2-1)^2$ y, finalmente,

$$\left|\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \le \int_{C_R} \frac{1}{(R^2-1)^2}|dz| = \frac{1}{(R^2-1)^2}\, l(C_R) = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}\,.$$

Puesto que $\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = 0$, se sigue que

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,. \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado auxiliar es muy útil en el cálculo de ciertas integrales, para poder obtener las estimaciones correctas.

Lema de Jordan. Para todo $R > 0$ se cumple la desigualdad

$$0 < \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt < \frac{\pi}{R}\,.$$

<u>Demostración</u>. Utilizando la *desigualdad de Jordan* vista en los cursos de Cálculo:

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2} \implies \operatorname{sen} t \ge \frac{2}{\pi} t$$

y la simetría de la gráfica de la función $e^{-R\operatorname{sen} t}$ respecto a la recta vertical $t = \pi/2$, obtenemos que

$$\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\,dt = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) < \frac{\pi}{R}\,.$$

La positividad de la integral es obvia. $\blacksquare$

Ejemplo 15. Sea C_R la semicircunferencia del ejemplo anterior. Demuestre que

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\,dz \to 0\,, \qquad R\to+\infty\,.$$

Solución. Por la desigualdad triangular, para $|z| = R > 0$ y R suficientemente grande (por ejemplo, $R > 2$ será suficiente), obtenemos $|(z-1)^2+1| \geq |z-1|^2-1 \geq (R-1)^2-1$. Escribiendo $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, observemos también que en C_R se cumple

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos t - R\operatorname{sen} t}| = e^{-R\operatorname{sen} t}\,.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que en C_R: $dz = Re^{it}\,dt$ y aplicando el Lema de Jordan, obtenemos

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \left|\frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\right| |dz| \leq \frac{R}{(R-1)^2-1}\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt < \frac{\pi}{(R-1)^2-1} \to 0$$

cuando $R \to +\infty$. ■

Aplicacion del Teorema de los residuos al cálculo de integrales impropias

El cálculo de residuos es muy efectivo para evaluar ciertas integrales impropias de funciones racionales (y otras). Para calcular una de esas integrales, digamos $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, normalmente consideramos la función compleja $f(z)$ o una muy similar y la integramos a lo largo de un contorno convenientemente elegido. Partimos como base de un contorno, γ_R, compuesto por el intervalo $I_R = [-R,R]$ y por una semicircunferencia, C_R, desde R hasta $-R$, situada o bien en el semiplano superior o bien en el inferior, con la siguiente idea:

(1) para evaluar $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{I_R} f(z)\,dz$, usamos el Teorema de los residuos (o, en algunos casos especiales, la Fórmula integral de Cauchy);
(2) observamos que $\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R} f(z)\,dz = I$;
(3) demostramos que, cuando $R \to +\infty$, la integral $\int_{C_R} f(z)\,dz$ tiende a cero;
(4) pasando al límite cuando $R \to +\infty$, obtenemos finalmente el valor de la integral I.

Si la función $f(x)$ involucra alguna función trigonométrica, por ejemplo, $\cos x$, conviene reemplazar esa parte de la función por e^{ix} y hacer las modificaciones correspondientes en la función compleja $f(z)$.

Si nos encontramos con algún polo u otro tipo de singularidad de f en el contorno básico γ_R, entonces será necesario modificar un poco el contorno para evitar que éste pase por las singularidades (por ejemplo, reemplazando una parte del segmento I_R por una semicircunferencia pequeña). A veces es incluso necesario (o conveniente) considerar otro contorno diferente.

Ejemplo 16. Calcule la integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz,$$

donde $R > 1$, $\gamma_R = I_R + C_R$, $I_R = [-R,R]$, C_R es la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$ y la curva γ_R está orientada en el sentido positivo.

Solución. Puesto que $z^2+1 = (z-i)(z+i)$, se observa que

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\,.$$

Por tanto, f es analítica en el conjunto abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq \pm i\}$ y tiene dos polos dobles en el plano: $z = i$ y $z = -i$. Sin embargo, sólo el polo $z = i$ se encuentra en el interior de la curva γ_R (ya que $R > 1$). Hallamos el valor del residuo en ese polo según la fórmula para un polo doble, por la fórmula vista antes:

$$\operatorname{Res}(f; i) = \lim_{z\to i}[(z-i)^2 f(z)]' = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

Los cálculos como éste serán muy importantes a la hora de evaluar diversas integrales impropias de funciones reales.

Ejemplo 17. *Compruebe la convergencia de la integral*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y evalúela, usando el teorema de los residuos.

Solución. En primer lugar, la integral converge ya que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y ambas integrales convergen. La integral sobre el intervalo $[0,1]$ converge porque no es impropia sino una integral habitual de Riemann de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. La integral impropia sobre el intervalo $(1, +\infty$ converge debido al *criterio de comparación*, ya que

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} < \frac{1}{x^4}, \qquad x > 1,$$

y $\int_1^\infty (1/x^4)\,dx$ converge.

Sin embargo, el cálculo de las integrales de este tipo suele ser no trivial. Para calcular I, utilizaremos el método de los residuos. Consideraremos el contorno ya habitual: $\gamma_R = I_R + C_R$, donde $I_R = [-R, R]$ y C_R es la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$; le daremos a γ_R la orientación positiva, de modo que el intervalo I_R se recorrerá desde $-R$ hasta R y C_R desde R hasta $-R$.

Cuando $R > 1$, la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ tiene un polo doble, a saber, $z = i$, dentro de γ_R. Usando el teorema de los residuos, en el Ejemplo **16** hemos evaluado la integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

Observemos que su valor es independientemente de R, siempre y cuando $R > 1$. Por otro lado, parametrizando el intervalo I_R simplemente como $z = x$, $-R \le x \le R$, obtenemos

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\,,$$

puesto que en el Ejemplo **14** demostramos que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = 0\,.$$

Dado que $f(x) = 1/(x^2+1)^2$ es una función par, se sigue que

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx = 2I$$

y, por tanto, $I = \pi/4$. ■

El método de los residuos también es útil cuando tenemos una integral mixta, involucrando una función racional y otra trigonométrica. Para ello conviene utilizar el lema de Jordan explicado antes.

Ejemplo 18. *Usando el teorema de los residuos, evalúe las siguientes integrales:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x-1)^2+1}\,, \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(x-1)^2+1}\,,$$

comprobando previamente su convergencia.

Solución. La integral I es convergente. Primero observemos que

$$\left|\frac{\cos x}{(x-1)^2+1}\right| \le \frac{1}{(x-1)^2+1} \sim \frac{1}{x^2}\,, x \to \infty\,.$$

Dado que $\int_1^\infty 1/x^2\, dx$ converge, el *criterio asintótico* demuestra que converge la integral

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

y entonces, según el *criterio de comparación*, la integral

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x-1)^2+1}$$

converge absolutamente. De manera análoga, se demuestra que converge absolutamente la integral

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x\, dx}{(x-1)^2+1}\,,$$

mientras que la integral desde -1 hasta 1 de la misma función tiene valor finito, al ser la integral de una función continua en un intervalo finito y cerrado (el denominador no se anula). La comprobación es completamente similar para la integral del seno.

Una vez demostrada la convergencia, pasamos a la evaluación de las integrales usando el Teorema de los residuos. Integraremos la función convenientemente elegida (siguiendo la recomendación de sustituir una función trigonométrica básica por una exponencial relacionada):

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}$$

sobre el mismo contorno $\gamma_R = I_R + C_R$ que en los ejemplos anteriores. Hemos elegido esta función en lugar de una con funciones trigonométricas motivados por la identidad de Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

Esta elección de f simplificará los cálculos.

Determinemos las singularidades aisladas de f. Es fácil ver que $(z-1)^2+1=0$ si y sólo si $z-1=\pm i$, es decir, los ceros del denominador son $z = 1 \pm i$. Así obtenemos la factorización

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$$

De los dos polos simples de f, sólo $z = 1+i$ se encuentra dentro de γ_R, cuando R es suficientemente grande: $R > |1+i| = \sqrt{2}$. Es fácil calcular el residuo en este polo:

$$\operatorname{Res}(f; 1+i) = \lim_{z\to 1+i} (z-1-i) f(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{e^{iz}}{z-1+i} = \frac{e^{-1+i}}{2i}.$$

Según el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f; 1+i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1+i}}{2i} = \pi e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1).$$

Una vez más, tenemos

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

En el Ejemplo **15** ya hemos demostrado que $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$, cuando $R \to +\infty$, utilizando el *lema de Jordan*. Finalmente, pasando al límite cuando $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{e}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}.$$

Igualando las partes reales e imaginarias en los dos extremos de la igualdad anterior, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1} = \frac{\pi}{e}\cos 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1} = \frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 1. \qquad \blacksquare$$

La complicación en el siguiente ejemplo reside en la necesidad de definir correctamente la función elegida como función analítica (es decir, hay que elegir un dominio conveniente para definir el logaritmo, etc.).

Ejemplo 19. *Evalúe la integral*

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx,$$

comprobando previamente su convergencia para todo $p \in (-1,1)$.

Solución. Cerca de $x = 0$, la función $x^p/(1+x^2) \sim x^p$ y la integral $\int_0^1 x^p\,dx$ converge si y sólo si $p > -1$. Por tanto, la integral $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$ converge si y sólo si $p > -1$. Cuando $x \to +\infty$, la función $x^p/(1+x^2) \sim 1/x^{2-p}$ y $\int_1^{+\infty} 1/x^{2-p}\,dx$ converge si y sólo si $p < 1$. Por consiguiente, I_p converge si y sólo si se cumplen a la vez ambas condiciones: $p > -1$ y $p < 1$.

Consideraremos la función compleja $f(z) = z^p/(1+z^2)$ definida en un dominio adecuado. Por ejemplo, podemos definir la función $z^p = e^{p\log z}$, eligiendo la siguiente determinación ("rama") del logaritmo:

$$\log z = \ln|z| + i\arg z, \qquad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi/2 < \arg z < (3\pi)/2\},$$

el plano menos el semieje imaginario negativo.

Conviene elegir el siguiente contorno $\gamma_{R,\varepsilon}$ en Ω:

$$\gamma_{R,\varepsilon} = C_R + I^- + C_\varepsilon + I^+,$$

donde R es grande y ε pequeño, $C_R = \{z = Re^{it} : \ 0 \le t \le \pi\}$ es la semi-circunferencia de centro en el origen y radio R contenida en el semiplano superior, recorrida desde R hasta $-R$, $I^- = [-R, -\varepsilon]$ (intervalo en el semieje real negativo), $C_\varepsilon = \{z = \varepsilon e^{it} : \ \pi \ge \varepsilon \ge 0\}$ es una semi-circunferencia contenida en el semiplano superior, de centro en el origen y radio ε, recorrida desde $-\varepsilon$ hasta ε y, por fin, $I^+ = [\varepsilon, R]$ (intervalo en el semieje real positivo). De esta forma el contorno, junto con el dominio interior que acota, se queda dentro del dominio Ω donde está definido el logaritmo complejo.

Nuestra función f es holomorfa en Ω, salvo en un polo simple, $z = i$, que se encuentra en el interior del contorno. Teniendo en cuenta que $i = e^{\pi i/2}$ y, por tanto, $i^p = e^{\pi i p/2}$, calculamos el residuo correspondiente:

$$\operatorname{Res}(f; i) = \frac{i^p}{2i} = \frac{\cos(\pi p)/2 + i\operatorname{sen}(\pi p)/2}{2i}$$

Es fácil ver que

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \pi R \cdot R^p/(R^2-1) \to 0, \qquad R \to +\infty,$$

ya que $p+1 < 2$. De manera similar,

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le \pi\varepsilon \cdot \varepsilon^p/(1-\varepsilon^2) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0^+,$$

teniendo en cuenta que $p+1 > 0$.

Cuando $z \in I^-$, tenemos que $z = x < 0$ y por tanto $\log z = \ln(-x) + \pi i$. Con la determinación del logaritmo escogida, calculamos

$$z^p = e^{p\log z} = e^{p\ln(-x)+p\pi i} = e^{p\pi i} = (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p)) \cdot (-x)^p$$

y, por tanto,

$$\int_{I^-} f(z)dz = (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p))\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(-x)^p}{1+x^2}dx = (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p))\int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^p}{1+x^2}dx$$

(cambiando x por $-x$).

Puesto que $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to +\infty$ y $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos en el límite que

$$\begin{aligned}
2\pi i \operatorname{Res}(f; i) &= \pi(\cos\frac{\pi p}{2} + i\ \operatorname{sen}\frac{\pi p}{2}) \\
&= \lim_{R\to+\infty,\,\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz \\
&= (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p))\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx.
\end{aligned}$$

Tomando las partes reales y usando la identidad $\cos(2x)+1=\cos^2 x$, obtenemos

$$\pi\cos\frac{\pi p}{2} = (\cos(\pi p)+1)\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,dx = 2\cos^2\frac{\pi p}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,dx,$$

Despejando la integral, se sigue que

$$I_p = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}. \qquad \blacksquare$$

Cálculo de la transformada de Fourier mediante las técnicas complejas

Definición. Sea $u:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función C^1 a trozos en la recta real y absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u(t)|\,dt < +\infty.$$

La *transformada de Fourier* de u se define como la función

$$\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-ixt}\,dt, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

La transformada de Fourier tiene diversas propiedades interesantes y muchas aplicaciones en Análisis de Fourier, Análisis Armónico, Probabilidad, Ecuaciones Diferenciales y Teoría de Operadores, entre otros campos. No obstante, calcular explícitamente la transformada de Fourier de una función concreta suele ser una tarea no trivial en muchos casos y requiere un buen manejo de técnicas de integración. Presentamos aquí el cálculo de la transformada de Fourier de una función racional suave y absolutamente integrable utilizando los métodos estudiados en estos apuntes.

Ejemplo 20. *Calcule la transformada de Fourier, $\widehat{u}(x)$, de la función $u(t)=\frac{1}{1+t^2}$.*

Solución. Hemos de calcular la integral $\widehat{u}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-ixt}\,dt$, para todo x real. El caso $x=0$ es fácil:

$$\widehat{u}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi\ .$$

Calculemos ahora $\widehat{u}(x)$ para un valor $x<0$, integrando la función analítica de z, dada por

$$f(z) = \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}$$

sobre el contorno $\gamma_R = C_R + I_R$ ya considerado en varios ejemplos anteriores. Al igual que en esos ejemplos, puede verse que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

A saber, escribiendo $z=a+ib$, $b\ge 0$ ($z\in C_R$), obtenemos

$$|f(z)| = \frac{|e^{-ixz}|}{|1+z^2|} = \frac{|e^{-ixa}e^{xb}|}{|1+z^2|} = \frac{e^{xb}}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|z^2|-1} = \frac{1}{R^2-1},$$

utilizando primero las hipótesis $x < 0$, $b \geq 0$ y luego la desigualdad triangular: $|1 + z^2| \geq |z^2| - 1$. Luego, como en el Ejemplo **14**, vemos que

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{R^2 - 1}\,\ell(C_R) = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,.$$

Puesto que f sólo tiene un polo simple, $z = i$, dentro de γ_R ($R > 1$), el teorema de los residuos (o la fórmula de Cauchy) implica que

$$\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(t)\,dt = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f; i) = 2\pi i\,\frac{e^{-ix\cdot i}}{i + i} = \pi e^{x}\,.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos $\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \pi e^{x}$, para $x < 0$.

Integrando sobre el contorno simétrico respecto al eje real, compuesto por el mismo intervalo I_R y por la otra semi-circunferencia de radio R desde R hasta $-R$, pero ubicada en el semiplano inferior, con el polo de f en $-i$ esta vez, obtenemos $\widehat{u}(x) = \pi e^{-x}$, para $x > 0$. Resumiendo los tres casos en una fórmula, ahora podemos escribir:

$$\widehat{u}(x) = \pi e^{-|x|}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

obteniendo la fórmula que se puede encontrar en diversos textos.

Preparado por Dragan Vukotić,

profesor de un grupo de la asignatura en varias ocasiones