Apuntes y ejercicios resueltos:

Integración compleja: Teoremas de Cauchy. Ejemplos y ejercicios básicos

En estos apuntes, la palabra dominio significa, como es habitual, un conjunto abierto y conexo en el plano (y que, por tanto, es conexo por caminos poligonales). Las letras más habituales para denotar un dominio son Ω y D. Un ejemplo frecuente de un dominio es el disco abierto de centro c y radio r: $D(c,r) = \{z : |z-c| < r\}$.

Consideraremos casi siempre curvas C^1 (suaves) a trozos, simples (sin autointersecciones) y cerradas. Para simplificar el lenguaje, usaremos con frecuencia la palabra contorno para una curva con esas características.

Según el teorema de Jordan, si γ es un contorno, entonces $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ es un conjunto abierto con dos componentes conexas: un dominio acotado y otro dominio no acotado. El dominio acotado por γ, en estos apuntes denotardo por $D_{\text{int}}(\gamma)$, se denomina el dominio interior a γ; la componente conexa no acotada se denomina el dominio exterior y se denotará como $D_{\text{ext}}(\gamma)$. Para poder enunciar y utilizar los teoremas de Cauchy que nos interesan en esta sección, consideraremos típicamente un contorno γ que, junto con su dominio interior, está contenido en un dominio Ω donde cierta función f es holomorfa (analítica).

Recordemos que una función f es holomorfa en un dominio Ω si tiene derivada $f'(z)$ en todos los puntos z de Ω. Una función se denomina analítica en Ω si en cada disco $D(c,r)$ contenido en Ω se puede escribir como serie de potencias: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$. Sabemos de clase que una serie de potencias se puede derivar tantas veces cuantas se quiera, obteniendo otra serie de potencias convergente en el mismo disco. Por lo tanto, la propiedad de ser analítica es aparentemente mucho más fuerte que la propiedad de ser holomorfa. No obstante, uno de los puntos centrales de este curso nos enseña que toda función holomorfa en Ω es, de hecho, analítica en cualquier disco contenido en Ω. Por lo tanto, los conceptos de analiticidad y holomorfía son equivalentes; es por ello que para una función usaremos indistintamente ambos términos holomorfa y analítica.

Observación. Para seguir estos apuntes, no es necesario ningún conocimiento de las singularidades aisladas ni del teorema de los residuos. Esos temas se abordarán en una segunda entrega, junto con otras aplicaciones de los teoremas de Cauchy.

Teorema (integral) de Cauchy. *Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo, Ω, en el plano que contiene a un contorno γ. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

para ambas orientaciones posibles (puesto que el cambio de orientación sólo cambia el signo de la integral, que en este caso no importa).
Conviene observar que, al ser simplemente conexo, Ω junto con γ contiene también a su dominio interior.

Ejemplo 1 *Si γ es el rectángulo con los vértices 0, 4, $4+i$, i, entonces $\int_\gamma e^{-3z^2+12}dz = 0$. Esto se puede justificar como sigue. Puesto que la función $f(z) = e^{-3z^2+12}$ es holomorfa en todo el plano, podemos tomar $\Omega = \mathbb{C}$, Obviamente, es un dominio simplemente conexo y γ está contenido en Ω.*

Obsérvese que normalmente tenemos la flexibilidad de reducir el dominio Ω si nos conviene; lo importante es que el contorno γ esté contenido en él. En el ejemplo anterior, nos hubiera valido en lugar de $\Omega = \mathbb{C}$ tomar como Ω el disco $D(0,6)$ o un rectángulo abierto que contuviese al rectángulo indicado.

Problema 1 *Calcule la siguiente integral, justificando la respuesta:* $\int_{|z-i|=1} \dfrac{dz}{z^2+9}$.

SOLUCIÓN. En este caso la orientación de la curva, que es la circunferencia de centro i y radio 1, va a ser irrelevante ya que la integral será igual a cero. En efecto, la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$ es holomorfa en todos los puntos del plano salvo en los ceros del denominador, que son $\pm 3i$. Escogiendo el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \operatorname{Im} z < \frac{5}{2}\}$, vemos que es simplemente conexo (es una banda horizontal), que contiene a la circunfencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}$ y que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, así que el resultado de integración es cero en virtud del Teorema de Cauchy.

Problema 2 *Sea* $\gamma = C(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$ *con cualquier orientación. Calcule* $\int_\gamma g(z)\,dz$*, donde* $g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que g ya no es analítica en todo el plano porque el denominador se anula en los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. (Es un ejercicio sencillo pero instructivo demostrar que ésos son los únicos ceros en todo el plano, usando la definición de la función seno a través de la función exponencial.)

Escojamos, por tanto, un dominio reducido, por ejemplo $\Omega = D(2; 10/9) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 10/9\}$. Este disco es simplemente conexo, no contiene a ninguno de los puntos z_n (por tanto, g es holomorfa en Ω) y contiene a la curva γ). Por tanto, se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy, lo cual nos permite concluir que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\,dz = 0. \qquad \blacksquare$$

Cuando el integrando no es necesariamente holomorfo pero es una fracción sencilla (con denominador lineal), con frecuencia es útil el siguiente importante resultado.

Fórmula integral de Cauchy. *Sea* Ω *un dominio simplemente conexto en el plano y* γ *un camino (contorno) contenido en* Ω *con orientación positiva. Sea* f *una función de la forma*

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a},$$

donde g *es analítica en* Ω *y* a *es un punto en el interior del contorno* γ*. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}\,dz = g(a), \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \ge 1.$$

Ejemplo 2 *Sea* γ *la circunferencia unidad con la orientación positiva. Entonces*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i \cdot \cos 0 = 2\pi i.$$

Esto se sigue aplicando la Fórmula Integral de Cauchy al dominio simplemente conexo $\Omega = \mathbb{C}$ *y a la función* $f(z) = \frac{\cos z}{z}$*. Según la notación del teorema,* $g(z) = \cos z$*, una función holomorfa en todo el plano (entera).*

Considerando la misma circunferencia, pero con la orientación negativa (denotada γ^-*), obtendríamos*

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos z}{z}\,dz = -\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz = -2\pi i.$$

Problema 3 *Para la misma circunferencia γ que en el ejemplo anterior y con orientación positiva, calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-2z}\,dz.$$

SOLUCIÓN. Eligiendo esta vez el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\, z < \frac{3}{2}\}$ (al que no pertenece el punto $z = 2$), vemos que es simplemente conexo y que la curva γ está contenida en Ω y, además, la función $g(z) = \frac{\cos z}{z-2}$ es obviamente holomorfa en Ω. Por la Fórmula Integral de Cauchy, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-2z}\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, g(0) = 2\pi i \cdot (-\frac{1}{2}) = -\pi i. \qquad \blacksquare$$

Problema 4 *Evalúe la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{2\,dz}{4z^2-1},$$

donde γ es la circunferencia unidad $\{z : \ |z| = 1\}$ con la orientación positiva.

SOLUCIÓN. Un método posible consiste en descomponer la función f en fracciones simples y aplicar a cada una de ellas la fórmula integral de Cauchy. (Otro método de resolución de este problema es posible, usando el teorema de los residuos que se considerará más tarde.) Empezamos escribiendo

$$f(z) = \frac{2}{(2z-1)(2z+1)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{2z+1}.$$

De aquí se obtiene

$$2 = (2z+1)A + (2z-1)B = (2A+2B)z + (A-B).$$

Por tanto, tenemos

$$A + B = 0, \qquad A - B = 2.$$

Resolviendo este sistema lineal (muy fácil), obtenemos que $A = 1$, $B = -1$ y, por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2z+1},$$

lo cual nos será más cómodo escribir como

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1/2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1/2}$$

para poder aplicar la fórmula integral de Cauchy. Recordemos que se necesita una función de la forma $z - a$ en el denominador. Observando que tanto el punto $z = 1/2$ como $z = -1/2$ se encuentran en el interior de γ, ya podemos calcular directamente:

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1/2}\,dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+1/2}\,dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

donde en ambas integrales se ha aplicado la Fórmula Integral de Cauchy a la función constante $g = 1$ en el numerador. $\blacksquare$

Problema 5 *Siendo γ la circunferencia unidad con la orientación positiva, calcule la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\, dz\,.$$

SOLUCIÓN. No podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy a la función $f(z) = \cos z/z$ en $\Omega = \{z : z \neq 0\}$ con $a = 0$: ese punto pertenece al interior de γ pero el interior de γ no está contenido en Ω (Ω no es simplemente conexo). Sin embargo, podemos usar la Fórmula Integral de Cauchy para la derivada de la función $g(z) = \cos z$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z^2} = g'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0\,,$$

siendo $n = 1$ y $a = 0$ en la fórmula para la derivada n-ésima en la fórmula integral de Cauchy. ■

Problema 6 *Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ y γ la circunferencia unidad (centrada en el origen) con orientación positiva y sea $n \in \mathbb{N}$ (un número natural). Supongamos que f es una función holomorfa en el disco D y que cumple la igualdad*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = 0\,,$$

Calcule razonadamente el valor de $f'\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

SOLUCIÓN. Usando álgebra elemental, la condición

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = \frac{1}{(n+1)^2}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{n+1})^2}\, dz$$

implica que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{n+1})^2}\, dz = 0\,.$$

Se cumplen las condiciones para aplicar la Fórmula Integral de Cauchy para la derivada:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = f'(a)\,, \qquad a \in \mathbb{D}\,.$$

En este caso, $a = \dfrac{1}{n+1} \in \mathbb{D}$ ya que $|\dfrac{1}{n+1}| < 1$. Esto significa que $f'\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$. ■

Preparado por Dragan Vukotić,
profesor de un grupo de la asignatura en varias ocasiones