Variable Compleja I (CURSO **2018-19**, **Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes breves y ejercicios resueltos

Las convergencias puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones

Definición. Decimos que la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a la función f en en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ (y escribimos $f_n \rightrightarrows_A f$) si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \ge N\, \forall z \in A \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\,.$$

Es irrelevante si ponemos $< \varepsilon$ ó $\le \varepsilon$ en la definición arriba. La formulación con $\le \varepsilon$ es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \ge N\, \sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \le \varepsilon\,.$$

Es decir, $f_n \rightrightarrows f$ en A si y sólo si $\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 1 *Demuestre que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = z^n$:*

(a) converge a cero si $|z| < 1$;

(b) converge a 0 uniformemente en cualquier subconjunto compacto del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(c) no converge uniformemente en $\mathbb{D}$.

(d) diverge si $|z| \ge 1$ y $z \ne 1$.

SOLUCIÓN. (a) Sabemos de Cálculo I que si $q \in \mathbb{R}$ y $|q| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Por tanto, si $|z| < 1$, tomando como $q = |z|$, vemos que $|z^n| = |z|^n \to 0$, lo cual significa que $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

(b) Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ (notación frecuente: $K \Subset \mathbb{D}$). Puesto que K es cerrado y acotado, es fácil ver (y lo hemos justificado con detalle en clase) que existe un número R, $0 < R < 1$, tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \le R$. Si $z \in K$ entonces $|z^n| = |z|^n \le R^n$ así que

$$\sup_{z\in K} |z^n - 0| \le R^n \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Por lo tanto, $z^n \rightrightarrows 0$ en K.

(c) La sucesión $f_n(z) = z^n \to 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$ así que sólo tenemos que examinar si $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \to 0$ o no cuando $n \to \infty$. Resulta que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |z|^n \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Puesto que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} > 0$ cuando $n \to \infty$, se sigue que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \not\to 0$, así que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{D}$.

(d) Sabemos de Cálculo I que $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ cuando $q \in \mathbb{R}$ y $q > 1$. Si $|z| > 1$ entonces $|z^n| = |z|^n \to +\infty$, lo cual significa por definición que $\lim_{n\to\infty} z^n = \infty$ (en el plano complejo extendido).

Queda por comprobar que z^n diverge si $|z| = 1$ y $z \neq 1$. Equivalentemente, veremos que $|z| = 1$ junto con la convergencia de z^n a un valor implica que $z = 1$.

Sea $z = e^{it}$. Por la fórmula de A. de Moivre, $z^n = e^{int} = \cos nt + i \operatorname{sen} nt$. Si esta sucesión compleja converge, entonces también convergen las sucesiones reales $x_n = \cos nt$ e $y_n = \operatorname{sen} nt$. Veremos que esto sólo es posible cuando $e^{it} = 1$. Sean $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Entonces también $x = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_{2n}$. Eso significa que

$$x_{2n} = \cos 2nt = 2\cos^2 nt - 1 = 2x_n^2 - 1\,, \qquad y_{2n} = \operatorname{sen} 2nt = 2 \operatorname{sen} nt \cos nt = 2x_n y_n\,.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que

$$x = 2x^2 - 1\,, \qquad y = 2xy\,.$$

De la segunda igualdad se sigue que o bien $y = 0$ o bien $x = 1/2$. Como el valor $x = 1/2$ no satisface la condición $x = 2x^2 - 1$, se sigue que $y = 0$. Puesto que la identidad básica $\cos^2 nt + \operatorname{sen}^2 nt = 1$ implica $x^2 + y^2 = 1$, concluimos que $x = 1$ ó $x = -1$. De nuevo, $x = -1$ incumple $x = 2x^2 - 1$, así que $x = 1$. Por lo tanto, hemos llegado a la conclusión de que $\cos nt \to 1$, $\operatorname{sen} nt \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Usando esta última conclusión y tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$x_{n+1} = \cos(nt + t) = \cos nt \cos t - \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $1 = \cos t$, mientras que tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$y_{n+1} = \operatorname{sen}(nt + t) = \operatorname{sen} nt \cos t + \cos nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $0 = \operatorname{sen} t$ y, por tanto, $z = e^{it} = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

Definición. La serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si converge la serie asociada de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Al igual que en Cálculo I (para las series de números reales), si una serie converge absolutamente entonces converge y su suma cumple $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Definición. Diremos que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ a la suma $S(z)$ si las sumas parciales $S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ convergen uniformemente a $S(z)$ en $A \subset \mathbb{C}$.

Teorema. (*Criterio de Weierstrass*) Si para todo $n \in \mathbb{N}$ (o para todo $n \geq N_0$ para un $N_0 \in \mathbb{N}$ fijo) y para todo $z \in A$ se cumple $|f_n(z)| \leq M_n$ y la serie de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A y absolutamente para todo $z \in A$ y su suma satisface la desigualdad $\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$.

Obsérvese que el criterio de Weierstrass sólo nos permite concluir que la serie converge pero no nos dice nada acerca del valor de la suma.

Ejercicio 2 *¿Para qué valores de z converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$? ¿Qué podemos afirmar acerca del tipo de convergencia para esos valores?*

SOLUCIÓN. Si la serie converge para un valor de z, entonces el término general $z^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Según el resultado del anterior ejercicio, para que esto ocurra se tiene que cumplir la condición $|z| < 1$. Veamos ahora que la serie converge en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

De hecho, veremos más: la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$. Las sumas parciales de la serie son conocidas y convergen puntualmente:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \to \frac{1}{1-z}, \qquad N \to \infty.$$

Si fijamos un subconjunto compacto $K \Subset \mathbb{D}$, existe un número $r \in (0,1)$ tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq r$. Entonces, por la desigualdad triangular inversa, $|1-z| \geq 1-|z| \geq 1-r > 0$ y luego podemos estimar la diferencia de las sumas parciales y la suma de la serie:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{1-z^{N+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{r^{N+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

La última cantidad tiende a cero cuando $N \to \infty$ (independientemente de $z \in K$ ya que r es fijo); es decir,

$$\sup_{z\in K}\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Por definición, esto significa que las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N} z^n$ convergen a $\frac{1}{1-z}$ uniformemente en K.

Ejercicio 3 *¿Para qué valores de z converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$?*

SOLUCIÓN. Después del cambio de variable

$$w = \frac{1+z}{1-z},$$

la serie se convierte en la serie geométrica de la variable w, que -después de los cálculos pertinentes- se puede volver a transformar en una función de z:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1-z}{-2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}.$$

Puesto que la serie geométrica sólo converge cuando $|w| < 1$, nuestra serie será convergente sólo para los z que cumplan $|1+z| < |1-z|$. Es decir, cuando $|z-(-1)| < |z-1|$.

Geométricamente, dicho conjunto representa el lugar geométrico de los puntos que están más cerca de -1 que de 1, que es el semiplano izquierdo abierto.

Esto mismo también se puede ver algebraicamente: el conjunto indicado es el conjunto de los puntos para los que $|1+z|^2 < |1-z|^2$ o, equivalentemente,

$$1 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z < 1 + |z|^2 - 2\mathrm{Re}\, z.$$

Esto significa que $\mathrm{Re}\, z < 0$, lo cual viene a decir que z está el semiplano izquierdo abierto. ∎

Definición. La función compleja *coseno* se define en términos de la función exponencial como sigue:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

como generalización de la función real coseno vista en los cursos de Cálculo.

Ejercicio 4 *Demuestre que las series complejas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos(nz)\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} \mathrm{sen}(nz)$$

convergen absoluta y uniformemente en cada banda horizontal cerrada de la forma

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \colon |Im\, z| \le 1 - \varepsilon\}\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

SOLUCIÓN. Cuando $z = x + iy \in \Omega_\varepsilon$, tenemos $|y| \le 1 - \varepsilon$ y, por tanto, $e^{\pm y} \le e^{1-\varepsilon}$. Luego (aplicando la definición de la función exponencial, la desigualdad triangular y esta última desigualdad para la exponencial)

$$\begin{aligned} |e^{-n} \cos nz| &= \left| e^{-n} \cdot \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2} \right| = \frac{e^{-n}}{2} \cdot \left| e^{inx} e^{-ny} + e^{-inx} e^{ny} \right| \\ &\le \frac{e^{-n}}{2} \cdot \left(e^{-ny} + e^{ny} \right) \le \frac{e^{-n}}{2} \cdot 2 \cdot e^{n(1-\varepsilon)} = e^{-n\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

La serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon}$ es sumable por ser una serie geométrica cuya razón es $q = e^{-\varepsilon} < 1$. El criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos nz$ converge absoluta y uniformemente en cada Ω_ε. ■

Preparado por Dragan Vukotić, profesor de un grupo de la asignatura en 2014-15, 2015-16 y 2018-19