Apuntes y ejercicios resueltos:

Principio del argumento. Teorema de Rouché

Recordemos que $\text{Ind}(0;\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}$ denota al índice de una curva Γ respecto al origen (el número de vueltas que da Γ alrededor del origen). Por razones topológicas, la imagen $f(\gamma)$ de una curva, γ, por una función continua, f, también es una curva.

Principio del argumento. *Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno (una curva cerrada y simple, C^1 a trozos), contenido en Ω junto con el dominio que acota y orientado positivamente. Si f es una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en γ y sus ceros en el dominio interior a γ son $a_1,\dots, a_N$ (contando las multiplicidades), entonces*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \text{Ind}(0; f(\gamma)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f\,,$$

donde $\Delta_\gamma \arg f$ denota la variación total del argumento del punto $f(z)$ cuando z recorre la curva γ.

Teorema de Rouché. *Sea Ω un dominio en el plano y γ una curva cerrada y simple, C^1 a trozos, contenida en Ω junto con el dominio que acota. Si f y g son dos funciones holomorfas en Ω tales que $|f(z)| > |g(z)|$ para todo z en γ, entonces las funciones f, $f-g$ y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el dominio interior a la curva γ: $N_\gamma(f) = N_\gamma(f-g) = N_\gamma(f+g)$, contando las multiplicidades.*

Ejercicio 1 *Halle el número de soluciones de la ecuación $3z^4+7z^3-z+2=0$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ y en su exterior $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}} = \{z\in\mathbb{C} : |z|>1\}$.*

SOLUCIÓN. Sean $f(z) = 7z^3$ y $g(z) = 3z^4-z+2$. Ambas son enteras y en la circunferencia unidad, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1$, cumplen la desigualdad

$$|f(z)| = 7 > 6 \geq 3|z|^4 + |-z| + 2 \geq |3z^4 - z + 2| = |g(z)|$$

por la desigualdad triangular. Por tanto, tenemos en $\mathbb{T}$ la desigualdad estricta $|f(z)| > |g(z)|$ y podemos aplicar el Teorema de Rouché. Según dicho resultado, el número de ceros de la función $(f+g)(z) = 3z^4+7z^3-z+2$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ es igual al de la función f. Ya sabemos que éste es igual a 3, teniendo en cuenta las multiplicidades. Por tanto, la función $f+g$ tiene 3 ceros en $\mathbb{D}$.

Al ser un polinomio de grado 4, la función $f+g$ tiene 4 ceros en el plano, contando las multiplicidades. Es fácil ver que no tiene ningún cero en el círculo unidad $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$; esto se sigue de la desigualdad demostrada arriba y la desigualdad triangular: $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$ en $\mathbb{T}$. Por tanto, sólo tiene un cero en el exterior del disco.

Ejercicio 2 *Sea Ω un dominio plano que contiene al disco unidad, $\mathbb{D}$ y f una función holomorfa en Ω tal que $|f(z)| < 1$ para todo z que cumple $|z| = 1$. Demuestre que f tiene en $\mathbb{D}$ exactamente un punto fijo (un punto a tal que $f(a) = a$).*

SOLUCIÓN. Decir que a es un punto fijo de f es equivalente a decir que a es una solución de la ecuación $z - f(z) = 0$. El Teorema de Rouché nos ayudará a contar el número de ceros de esta función en $\mathbb{D}$. Dado que en la circunferencia unidad las funciones f y z, ambas holomorfas en Ω, cumplen la desigualdad estricta $|f(z)| < 1 = |z|$, se sigue por Rouché que $z - f(z)$ tiene en $\mathbb{D}$ el mismo número de ceros que la función identidad, que es exactamente uno. ■

Ejercicio 3 *Demuestre que el polinomio $p(z) = z^4 + iz + 1$ tiene exactamente dos ceros:*

(a) en el semiplano derecho $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

(b) en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

SOLUCIÓN. Antes que nada, observemos que, al ser p un polinomio de grado 4, tiene que tener exactamente cuatro soluciones complejas, teniendo en cuenta las posibles multiplicidades. Ninguno de esos ceros puede ser real ya que para un número real x la igualdad $p(x) = 0$ implicaría $x^4 + 1 = 0$ (igualando las partes real e imaginaria a cero), lo cual es imposible.

(a) Este apartado admite una solución elemental, debido a sus características particulares. En general, dado que p no tiene todos los coeficientes reales, de ninguna manera se sigue que si z_0 es una raíz, entonces $\overline{z}_0$ también lo es. No obstante, es fácil observar que si z_0 es una raíz, entonces $-\overline{z}_0$ es otra. En efecto, si $p(z_0) = 0$, conjugando la ecuación, obtenemos

$$0 = \overline{p(z_0)} = \overline{z}_0^4 - i\overline{z}_0 + 1 = \overline{(-z_0)}^4 + i \cdot (\overline{-z}_0) + 1 = p(-\overline{z}_0)\,.$$

Geométricamente, es fácil ver que si z_0 está en el semiplano derecho, entonces $-\overline{z}_0$ está en el izquierdo y viceversa. Por tanto, el número de ceros en el semiplano izquierdo es igual al número de ceros en el semiplano derecho. Como en total hay 4 y también es fácil comprobar que p no tiene ceros en el eje imaginario, tiene que haber exactamente dos ceros de p en el semiplano derecho y otros dos en el izquierdo.

(b) Seguiremos el método de observar la variación total del argumento de $f(z)$ mientras z recorre la frontera de un dominio “suficientemente grande” y contenido en el semiplano superior. (Otros métodos de solución son posibles.)

Dado que p tiene sólo una cantidad finita de ceros en el plano y, por consiguiente, en el semiplano superior, existe una cota finita para los módulos de sus ceros. Esto significa que para R suficientemente grande, cualquiera que sea un cero de p en el semiplano superior, estará contenido en el dominio interior a la curva γ_R, donde γ_R es una vez más la curva compuesta por el segmento $I_R = [-R, R]$ de la recta real y por la semicircunferencia C_R contenida en el semiplano superior desde el punto R hasta el punto $-R$, orientada en el sentido positivo. Para ver cuántos ceros puede haber dentro del contorno γ_R, utilizamos el principio del argumento y contamos el número de vueltas que da la curva imagen $p(\gamma_R)$ alrededor del origen.

Para los puntos $z = x \in [-R, R]$ tenemos $p(x) = x^4 + 1 + ix$; es decir, $\mathrm{Re}\, p(x) \geq 1 > 0$, mientras que la parte imaginaria puede tomar tanto valores positivos como negativos; por tanto, los puntos $p(x)$ están todos en el primer cuadrante y en el cuarto, así que la curva imagen $p(I_R)$ cruza el eje real pero no da ninguna vuelta alrededor del origen (tiene una “pequeña” variación del argumento).

Para los puntos $z \in C_R$, podemos escribir $p(z) = z^4(1 + \frac{i}{z^3} + \frac{1}{z^4})$.

Haciendo $R = |z|$ suficientemente grande, podemos hacer los valores i/z^3 y $1/z^4$ tan próximos a cero como se quiera, así que el valor $p(z)$ será muy próximo al valor z^4. Para $z \in C_R$ tenemos $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, con lo cual $z^4 = R^4 e^{4it}$ y $0 \leq 4t \leq 4\pi$. Dado que el argumento de z^4 cambia desde 0 hasta 4π cuando z recorre la curva C_R, lo mismo pasará con el argumento de $p(z)$, salvo quizás una diferencia muy pequeña que recuperamos moviéndonos por el intervalo I_R, así que en total $p(z)$ da dos vueltas alrededor del origen cuando z recorre la curva γ_R. Según el Principio del argumento, la función p tiene dos ceros en el interior de γ_R. Dado que para R suficientemente grande no hay ceros fuera de γ_R, el número total de ceros de p en el semiplano superior tiene que ser dos.

Preparado por Dragan Vukotić,

profesor de un grupo de la asignatura en varias ocasiones