Apuntes y ejercicios resueltos: otras aplicaciones cualitativas del teorema de los residuos

Los teoremas que abordamos en estos apuntes se pueden deducir como una "segunda generación" de las aplicaciones cualitativas del teorema de los residuos, por ejemplo, a partir del teorema de Rouché.

Teorema de la aplicación abierta

Teorema de la aplicación abierta. *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Entonces o bien $f \equiv cte$ o bien f es una aplicación abierta; es decir, para todo $U \subset \Omega$ abierto en el plano, el conjunto $f(U)$ es también abierto.*

Ejercicio 1 *Explique razonadamente por qué, si f es holomorfa en un dominio $\Omega \neq \emptyset$, es imposible que $f(\Omega) = \mathbb{R}$ o que $f(\Omega) = \overline{\Omega}$ (cuando $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$).*

SOLUCIÓN. El conjunto $\mathbb{R}$ no es abierto en $\mathbb{C}$ ya ningún disco puede estar contenido en $\mathbb{R}$. Según el Teorema de la aplicación abierta, sabemos que o bien f es abierta, en cuyo caso $f(\Omega)$ es abierto y no puede ser $\mathbb{R}$, o bien es constante, en cuyo caso $f(\Omega)$ es un conjunto que consiste en un único punto y, por tanto, tampoco puede ser $= \mathbb{R}$.

El razonamiento es análogo para $\overline{\Omega}$: es un conjunto cerrado. Los únicos subconjuntos de $\mathbb{C}$ que son abiertos y cerrados a la vez son el $\emptyset$ y $\mathbb{C}$; al ser $\overline{\Omega}$ distinto de ambos, no puede ser abierto. Luego, por el Teorema de la aplicación abierta, $f(\Omega) \neq \overline{\Omega}$, salvo que f sea constante: $f \equiv c$, pero en ese caso obtenemos $f(\Omega) = \{c\} \neq \overline{\Omega}$. ■

Ejercicio 2 *Si f es holomorfa y no constante en un dominio Ω donde cumple $|f(z)| \le 1$ entonces, de hecho, $|f(z)| < 1$ en Ω. Razone por qué.*

SOLUCIÓN. Supongamos que $|f(a)| = 1$ para cierto $a \in \Omega$. Sea $b = f(a)$. Puesto que f no es constante, es una aplicación abierta y, por tanto, $f(\Omega)$ es un conjunto abierto. Dado que $b \in f(\Omega)$, existe un radio $r > 0$ tal que el disco abierto $D(b;r) = \{z : |w - b| < r\}$ está contenido en $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $|b| = 1$, es obvio que el disco $D(b;r)$ contiene un punto c tal que $|c| > 1$; por ejemplo, podemos tomar $c = (1 + \frac{r}{2|b|})b$ ya que $|b - c| = \frac{r}{2} < r$. Pero $c \in D(b;r) \subset f(\Omega)$ así que $c = f(z)$ para cierto $z \in \Omega$ y $|f(z)| = |c| = |b| + \frac{r}{2} = 1 + \frac{r}{2} > 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $|f(z)| \le 1$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, concluimos que $|f(z)| < 1$ para todo z en Ω. ■

Principio del módulo máximo

Principio del módulo máximo (Primera versión). *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Si $|f|$ alcanza su máximo en un punto del dominio Ω, entonces $f \equiv cte$.*

Dicho en un lenguaje menos formal, la gráfica de la función $|f|$ vista como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se erige sobre el dominio Ω en el plano es un "paisaje sin picos".

Principio del módulo máximo (Segunda versión). *Sea Ω un dominio acotado en el plano y f una función holomorfa en Ω y continua en su cierre, $\overline{\Omega}$. (Obsérvese que, al ser continua, la función $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$.) Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{\partial\Omega} |f(z)|.$$

Es decir, el módulo máximo en este caso sólo se puede alcanzar en el borde del dominio si f no es constante. (Si es constante, se alcanza trivialmente en todo $\overline{\Omega}$.)

Ejercicio 3 *Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad y $\overline{\mathbb{D}}$ su cierre. Sea f una función no constante, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Sólo una de las siguientes situaciones es posible. ¿Cuál de ellas?*

(a) $|f| \le 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = -3$;
(b) $|f| \le 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(1) = 3$;
(c) $|f| \le 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$;
(d) Se cumple $f(1/2) = 4$; ademas, si $x^2 + y^2 = 1$ entonces $f(x + iy) = 3$.

SOLUCIÓN. Dado que $f \neq cte$, las condiciones (a), (c) y (d) contradicen al Principio del módulo máximo (en su segunda versión) ya que todos los valores en los puntos concretos en el dominio resultan ser números de módulo uno, mientras que (b) es posible, siendo el punto $z = 1$ un punto del borde del dominio. Un ejemplo concreto sería la función $f(z) = z + 2$ que cumple las condiciones del apartado (b). ■

Ejercicio 4 *Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f(z)| \le 1 - |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $f \equiv 0$.*

SOLUCIÓN. Si f es constante, digamos $f \equiv C$, entonces $|C| \le 1 - |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. Dejando que $|z| \to 1^-$, obtenemos $|C| \le 0$ y se deduce que $C = 0$, lo cual prueba la afirmación del problema.

Nos queda ver que es imposible el caso de una función f no constante. La idea principal consiste en demostrar que, bajo las hipótesis del problema, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Dejando que $\varepsilon \to 0^+$, esto implicará que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Para completar esta reducción al absurdo, sólo nos queda hacer demostrar de forma rigurosa la afirmación "para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$".

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si $|z| > 1 - \varepsilon$, entonces por las hipótesis del problema, $|f(z)| \le 1 - |z| < \varepsilon$. Veamos qué es lo que ocurre en el resto del disco, es decir, cuando $|z| \le 1 - \varepsilon$. El conjunto $K_\varepsilon = \{z : |z| \le 1 - \varepsilon\}$ es cerrado y acotado y, por tanto, compacto así que la función continua $|f|$ alcanza en él su máximo:

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

para cierto $z_0 \in K_\varepsilon$. Si este máximo fuera $\ge \varepsilon$, entonces el módulo máximo de $|f|$ en $\mathbb{D}$ sería justo $|f(z_0)|$ ya que en el resto f tiene módulo menor que ε. Pero el Principio del módulo máximo (en su primera versión, ya que la función no está definida en el borde de $\mathbb{D}$) nos dice que una función holomorfa y no constante no puede alcanzar su módulo máximo en un punto del dominio (en este caso, no puede hacerlo en z_0). Por lo tanto, se sigue que

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| < \varepsilon$$

y, por tanto, $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto completa la demostración. ■

Lema de Schwarz

Lemma de Schwarz. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, que cumple las siguientes condiciones: $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$. Entonces:*

(a) $|f(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

(b) $|f'(0)| \le 1$.

Si se cumple la igualdad en (a) para un $z \ne 0$ o en (b), entonces f es una rotación: $f(z) = \lambda z$ para cierto número λ tal que $|\lambda| = 1$.

Por lo que comentamos en un ejercicio anterior, la hipótesis "$|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$" en el Lema de Schwarz es equivalente a la aparentemente más fuerte "$|f(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{D}$". Por eso con frecuencia también enunciamos el Lema de Schwarz con la hipótesis $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Ejercicio 5 *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le |z+3/2|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuéstrese que $|f(1/2)| \le 1$ y hállense todas las funciones para las que se cumple la igualdad.*

SOLUCIÓN. Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = \frac{f(z)}{z+3/2}.$$

Dado que $z \ne -3/2$ para todo $z \in \mathbb{D}$, g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y, por hipótesis, cumple $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, $g(0) = 0$, así que podemos aplicar el Lema de Schwarz a esta función para deducir que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, $|f(z)| \le |z+3/2|$. En particular, para $z = 1/2$, se obtiene que $|f(1/2)| \le 1$.

Si se cumple la igualdad en $|f(1/2)| \le 1$, esto significa que $|g(1/2)| = 1/2$ y, por tanto, tenemos la igualdad en el Lema de Schwarz. Sabemos que esto sólo es posible cuando $g(z) = cz$, $c = cte$, $|c| = 1$, es decir, cuando $f(z) = cz(z+3/2)$, $|c| = 1$. ■

Ejercicio 6 *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y cumple la desigualdad $|zf(z)| \le e^{\mathrm{Im}\, z}$ en $\mathbb{D}$. Demuestre que entonces se tiene la desigualdad más fuerte $|f(z)| \le e^{\mathrm{Im}\, z}$ en $\mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. (Conviene observar que la desigualdad es más fuerte porque $|zf(z)| \le |f(z)|$ en $\mathbb{D}$.)

Consideremos la función g dada por $g(z) = zf(z)e^{-z}$. Es obvio que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y, por hipótesis, $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, puesto que $|e^z| = e^{\mathrm{Im}\, z}$. Por el Lema de Schwarz se sigue que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Es decir, $|zf(z)| \le |z|e^{\mathrm{Im}\, z}$ en $\mathbb{D}$ y, por tanto, $|f(z)| \le e^{\mathrm{Im}\, z}$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. La desigualdad para $z = 0$ se sigue por continuidad, pasando al límite cuando $z \to 0$. ■

Ejercicio 7 *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = f'(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ para todo z en el disco unidad. Demuestre que, de hecho, $|f(z)| \le |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. Conviene definir la función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ f'(0) = 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Puesto que

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = f'(0) = g(0)\,,$$

la función g tiene una singularidad evitable en el origen y es continua en ahí. Por tanto, $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Además, podemos aplicar el lema de Schwarz a f para deducir que $|f(z)| \le |z|$ en $\mathbb{D}$. Por consiguiente,

$$|g(z)| \le 1 \text{ en } \mathbb{D} \quad \text{y} \quad g(0) = f'(0) = 0$$

Aplicando de nuevo el lema de Schwarz pero esta vez a la función g, obtenemos que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Cuando $z \ne 0$, esto implica que $|f(z)| \le |z|^2$. Para $z = 0$, esta desigualdad se cumple trivialmente (es una igualdad). ■

Preparado por Dragan Vukotić,

profesor de un grupo de la asignatura en varias ocasiones