Apuntes y ejercicios resueltos: *Series de potencias*

A. Convergencia de series de potencias. Sean $c \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$. La suma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ se denomina serie de potencias centrada en $z = c$. Los números a_n son los coeficientes de la serie. En el caso especial cuando $a_n = 0$ para todo $n \geq N$, se obtienen los polinomios. Por supuesto, la suma puede empezar desde otro valor de n, distinto de cero (considerando los coeficientes iniciales $a_k = 0$), por ejemplo, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)(n-2)}(z+2i)^n$. Como veremos más adelante, las series de potencias representarán nuestro ejemplo principal de funciones holomorfas.

La convergencia de estas series se describe por el siguiente teorema fundamental.

Teorema. (*Abel*) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, existe un valor $R \in [0,+\infty]$ tal que la serie:

- converge absolutamente cuando $|z-c| < R$;

- converge uniformemente en cada disco cerrado $|z-c| \leq r$, donde $r < R$ (equivalentemente, converge uniformemente en cada subconjunto compacto $K \Subset D(c;R)$);

- diverge cuando $|z-c| > R$.

Habitualmente nos referimos a $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ como al disco de convergencia de la serie de potencias. El radio de convergencia R puede determinarse según la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

entendiendo que $1/+\infty = 0$ y $1/0^+ = +\infty$ e interpretando adecuadamente las distintas conclusiones del resultado en los casos extremos.

Observación. El teorema no indica nada acerca de la convergencia o divergencia en la circunferencia $|z-c| = R$ de centro c y radio R ya que caben todas las posibilidades: convergencia en toda la circunferencia, divergencia en cada punto de la circunferencia, convergencia en algunos puntos de la circunferencia y divergencia en el resto (véase el ejercicio siguiente para algunos ejemplos relevantes).

Una fórmula alternativa. Recordemos el siguiente hecho conocido del cálculo elemental: para toda sucesión $(c_n)_n$ de números positivos se cumple la desigualdad

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Por tanto, si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$, las cuatro cantidades coinciden y $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$. Por tanto, en el caso cuando $a_n \neq 0$ para todo n (o para todo $n \geq N$) y cuando el límite del cociente existe, tenemos la siguiente fórmula alternativa (de Hadamard) para el radio de convergencia: $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

Ejercicio 1. *Discuta la convergencia de las series funcionales $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ en función de los valores de z.*

SOLUCIÓN. Ambas son series de potencias centradas en el origen ($c = 0$) así que es aplicable el Teorema de Abel. Puesto que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, en ambos casos la fórmula de Cauchy-Hadamard implica fácilmente que

$R = 1$. Por tanto, ambas series convergen absolutamente en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y divergen para $|z| > 1$. Además, convergen uniformemente en cualquier disco $|z| \le r < 1$ (y, por tanto, en cualquier $K \Subset \mathbb{D}$).

La primera serie es la conocida serie geométrica cuyas sumas parciales son

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z}, \qquad N \to \infty.$$

Aunque la suma $\dfrac{1}{1-z}$ tiene sentido para todo $z \neq 1$, la serie geométrica sólo coincide con ella en $\mathbb{D}$, el disco unidad abierto, y no puede ser convergente en ningún punto de la circunferencia unidad ya que si $|z| = 1$, entonces o bien $z^n \to 1$ si $z = 1$ o bien z^n diverge (en el caso contrario) por el Ejercicio 1. Por tanto, el término general de la serie, $z^n \not\to 0$ en la circunferencia, luego la serie diverge allí.

Sin embargo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en todo el disco unidad cerrado $|z| \le 1$ debido al Criterio de Weierstrass ya que (para $n \ge 1$) $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ allí y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge. ■

Ejercicio 2. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2i)^n z^{n^3}$.

Solución. Observemos primero que el coeficiente a_k de la serie es no nulo si y sólo si $k = n^3$ y que en este caso $n = k^{1/3}$. Así obtenemos la siguiente fórmula para el coeficiente k-ésimo:

$$a_k = \begin{cases} (-2i)^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases}$$

Luego

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 2^{(k^{1/3}/k)} = \lim_{k\to\infty} 2^{k^{-2/3}} = 2^0 = 1\,.$$

Finalmente, Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard, obtenemos $R = 1$. ■

El siguiente resultado es conocido de los cursos de Cálculo. No es difícil dar una demostración usando el Criterio de Cauchy pero la omitiremos aquí.

Teorema. (*Criterio de Abel-Dirichlet*) Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ de números complejos y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ de números reales cumplen las siguientes condiciones:

(1) Las sumas parciales $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ forman una sucesión acotada;

(2) $(b_n)_n$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Ejercicio 3. *Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *es* 1 *y que, además,* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *es decreciente y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *Demuestre que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *converge en cada punto* z *con* $|z| = 1$ *salvo, posiblemente, en* $z = 1$.

Solución. Sea $|z| = 1$, $z \neq 1$. Podemos aplicar el Criterio de Abel-Dirichlet eligiendo $a_n = z^n$, puesto que

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \le \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}$$

y, por tanto, la sucesión (A_n) está acotada. Se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge para todo z con $|z| = 1$, $z \neq 1$.

El ejemplo de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$, cuyo radio de convergencia es 1, muestra que la serie con las características exigidas puede ser divergente para $z = 1$ (puesto que se convierte en la serie armónica para ese valor). ■

B. Derivación de series de potencias. Resulta que las series de potencias se pueden derivar, esencialmente, de la misma forma que los polinomios, es decir, término por término. La demostración del siguiente resultado se ha visto en clase.

Teorema. (Derivación de series de potencias) Si la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ tiene radio de convergencia R, $0 < R \leq +\infty$, entonces la función f es holomorfa en el disco abierto $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ y se puede derivar allí término por término:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-c)^k ,$$

siendo la derivada una nueva serie de potencias convergente en el mismo disco. Puesto que la serie para f' converge en el mismo disco, la operación se puede repetir tantas veces como se quiera para calcular las derivadas sucesivas. Por tanto, toda serie de potencias con $R > 0$ es una función diferenciable infinitas veces.

Ejercicio 4. *Calcule el radio de convergencia y la suma de las siguientes series de potencias:*

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) z^n .$$

SOLUCIÓN. (a) El radio de convergencia de la primera serie podría calcularse como en un ejercicio anterior, teniendo en cuenta que muchos términos son nulos. No obstante, existe un método alternativo. Después del cambio de variable $w = z^3$, la serie se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} w^n}{n!}$. Dado que el término general de esta nueva serie:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

contiene factoriales, es conveniente calcular el radio de convergencia usando la fórmula del cociente:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty .$$

Puesto que la serie converge para cada $w = z^3$ finito, se sigue que la serie inicial también converge para todo z. Por lo tanto, su radio de convergencia es $+\infty$.

Podemos hacer más. Recordando la fórmula vista en clase: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$, siendo la serie absolutamente convergente para todo z complejo y uniformemente convergente en todo disco cerrado (de radio finito), la primera serie puede escribirse como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^3)^n}{n!} = -e^{-z^3}$$

y se deduce que también converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier disco cerrado.

(b) Como en el apartado anterior, calculamos fácilmente que el radio de convergencia de la segunda serie es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1\,.$$

Recordemos que la serie geométrica también converge absolutamente en el disco unidad, siendo su suma $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}$. Por tanto, se puede derivar término por término en el disco unidad, obteniendo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\,.$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,z^{k-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,n\,z^{n-1}\,.$$

Finalmente, después de la multiplicación por z se obtiene

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,n\,z^n = 2z + 6z^2 + 12z^3 + 20z^4 + \dots$$

La convergencia de la última serie se justifica fácilmente, puesto que la multiplicación por z no cambia el radio de convergencia de la serie inicial; basta aplicar la fórmula de Cauchy-Hadamard a la nueva serie. ■

C. Operaciones algebraicas con series de potencias. Veremos ahora que dos series de potencias (¡centradas en el mismo punto!) se pueden sumar y multiplicar, interpretando la suma y el producto de manera adecuada.

Proposición. Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ tiene radio de convergencia $R = \min\{R_a, R_b\}$ y, además, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

para todo $z \in D(c;R)$.

La demostración (vista en clase) es sencilla.

Ejercicio 5. *Hemos definido en clase la función compleja coseno por la fórmula* $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ *que generaliza los valores de* $\cos x$ *conocidos de los cursos previos. Desarrolle la función coseno y discuta su convergencia.*

SOLUCIÓN. Partiendo del desarrollo conocido de la exponencial: $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!} = e^z$, válido para todo z en el plano, evaluamos la misma serie en iz y $-iz$ respectivamente. Luego, aplicando la Proposición anterior, sumamos ambas series:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n!}\left(i^n + (-i)^n\right)z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\,,$$

una fórmula cuyo caso especial con $z \in \mathbb{R}$ ya vimos en Cálculo. La última igualdad es tiene porque $i^n + (-i)^n = 0$ para n impar y para $n = 2k$ (par) se tiene $i^{2k} + (-i)^{2k} = 2(-1)^k$. ■

Ejercicio 6. *Encuentre razonadamente todas las series de potencias de z, convergentes en todo el plano y con la suma $f(z)$, que satisfagan la ecuación funcional $f(2z) = \dfrac{f(z)+f(-z)}{2}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

SOLUCIÓN. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias convergente en todo el plano. Si f cumple la ecuación indicada, entonces (por la Proposición vista antes)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n z^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} a_n z^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Por la unicidad de los coeficientes de Taylor, se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$2^n a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} a_n \,.$$

Por tanto, si algún $a_n \neq 0$, se obtiene

$$2^n = \frac{1+(-1)^n}{2} \,,$$

pero esto es imposible cuando $n \geq 1$ ya que entonces $2^n \geq 2$ mientras que

$$\frac{1+(-1)^n}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1 \,.$$

Se sigue que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, así que sólo el coeficiente a_0 puede ser no nulo, lo cual implica que $f \equiv cte$.

Es fácil comprobar que toda función constante efectivamente cumple la ecuación dada. Por tanto, las constantes son las únicas soluciones. ■

El siguiente resultado es técnicamente más complicado.

Teorema. (Mertens). Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, y definimos

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \,,$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n$ tiene radio de convergencia $R = \min\{R_a, R_b\}$ y, además,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n$$

para todo $z \in D(c;R)$.

Ejercicio 7. *Desarrolle en serie de potencias la función $\dfrac{e^z}{1-z}$ y determine su radio de convergencia.*

SOLUCIÓN. Evidentemente,

$$\frac{e^z}{1-z} = e^z \cdot \frac{1}{1-z}.$$

El primer factor se puede desarrollar en serie de potencias con radio de convergencia $R_a = +\infty$ y el segundo en serie de potencias con radio de convergencia $R_b = 1$. El Teorema de Mertens nos permite multiplicar las series, obteniendo

$$e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) z^n = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \frac{65}{24}z^4 + \dots,$$

una serie convergente para $|z| < 1$ ($R = \min\{1, +\infty\} = 1$). ■

D. Ejercicios de tipo mixto.

Definición. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Decimos que f es una función univalente en Ω si es holomorfa en Ω y es inyectiva ahí.

Ejercicio 8. *Sea $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, donde $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$. Demuestre que f es una función univalente en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.*

SOLUCIÓN. (a) Para ver que f es holomorfa en $\mathbb{D}$, basta ver que su serie de potencias centrada en el origen tiene radio de convergencia, por lo menos, uno. La hipótesis $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$ implica que $|a_n| \le 1/n$ para todo $n \ge 2$. Tomando las raíces n-ésimas, se sigue fácilmente de la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \ge 1$$

así que f es holomorfa, por lo menos, en $\mathbb{D}$.

(b) Veamos ahora que f es inyectiva en $\mathbb{D}$. Para conseguirlo, demostraremos que si $f(z) = f(w)$, para z, $w \in \mathbb{D}$ entonces $z = w$. La hipótesis $f(z) = f(w)$ significa que

$$f(z) - f(w) = z - w + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^n - w^n) = (z-w) \cdot \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots w^{n-1})\right).$$

Debido a nuestra hipótesis sobre los coeficientes a_n y teniendo en cuenta que $|z|, |w| < 1$, tenemos

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots w^{n-1})\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z|^{n-1} + |z|^{n-2}|w| + \dots |w|^{n-1}) < \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1.$$

La desigualdad de arriba es estricta ya que $a_n \ne 0$, así que la igualdad $1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots w^{n-1}) = 0$ es imposible y, por tanto, $z = w$, lo cual prueba que f es inyectiva en $\mathbb{D}$. ■

Preparado por Dragan Vukotić, profesor de un grupo de la asignatura en 2014-15, 2015-16 y 2018-19