Variable Compleja I, UAM **Grupo de 4^{o} de Doble Titulación Matemáticas - Informática**

EXAMEN FINAL, CONVOCATORIA DE MAYO DE 2019

Inicial del primer apellido:

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

D.N.I./PASAPORTE ______________ FIRMA ______________________

Salvo en las preguntas de tipo test, en este examen se pide:

- justificar todas las respuestas de manera clara,
- mostrar los detalles del trabajo,
- nombrar los teoremas y las fórmulas que se utilicen y comprobar que es justificado su uso.

Todos los problemas puntúan igual ($5 \times 2 = 10$ puntos).

PUNTUACIONES:

1. En cada uno de los siguientes apartados, se pide elegir la respuesta que se considere correcta. Debe marcarse sólo una en el lugar correspondiente en el recuadro al final de esta página; de lo contrario, el ejercicio no puntuará. No es necesario incluir ninguna justificación. Cada apartado vale $0,5$ puntos.

   (a) El valor exacto de la expresión $(1-i)^{200}$ es

   (A) -2^{100}; (B) $2^{100}i$; (C) $-2i$; (D) 0;

   (E) 2^{100}; (F) 1; (G) 2^{200}; (H) Ninguno de los anteriores.

   (b) ¿Cuáles de las siguientes funciones

   $$f(x,y)=x^2+y^2+2xyi\,,\quad g(x,y)=x^2-y^2+2xyi\,,\qquad h(x,y)=e^x(\cos y-i\operatorname{sen} y)$$

   son enteras (holomorfas en todo el plano complejo $\mathbb{C}$)?

   (A) ninguna; (B) sólo f; (C) sólo g; (D) sólo h;

   (E) sólo f y g; (F) sólo g y h; (G) sólo f y h; (H) todas.

   (c) El número de ceros (contando sus multiplicidades) de la función $f(z)=z^8+7z^3+5$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ es

   (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4;

   (E) 5; (F) 7; (G) 8; (H) Ninguno de los anteriores.

   (d) La imagen mediante la función exponencial del dominio rectangular

   $$R=\{z:-1<\operatorname{Re} z<0\,,\,\pi<\operatorname{Im} z<2\pi\}$$

   es el siguiente dominio:

   (A) $\{z:0<|z|<1\,,\,0<\arg z<\pi\}$; (B) $\{z:\frac{1}{e}<|z|<1\,,\,0<\arg z<2\pi\}$;

   (C) $\{z:0<|z|<1\,,\,0<\arg z<\frac{\pi}{2}\}$; (D) $\{z:-1<\operatorname{Re} z<0\,,\,\pi<\operatorname{Im} z<2\pi\}$;

   (E) $\{z:\frac{1}{e}<|z|<1\,,\,\pi<\arg z<2\pi\}$; (F) Ninguno de los anteriores.

   RESPUESTAS:

2. (a) Calcule razonadamente el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1} z^n$.

(b) Calcule el valor exacto de la suma $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n$ y explique para qué valores de z converge la serie.

3. (a) Encuentre todos los polos de la función $\dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$, señalando aquellos que estén dentro de la circunferencia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

(b) Calcule la integral $\displaystyle\int_C \frac{dz}{e^z + e^{-z}}$, entendiendo que C tiene orientación positiva.

4. Se pide explicar brevemente el razonamiento aplicado en cada apartado.

   (a) Sea f una función analítica en un dominio Ω y tal que $\operatorname{Re}(f(z)) = 2\operatorname{Im}(f(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es constante.

   (b) Determine razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que cumplan la condición
$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3+n}{5n+2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

5. Determine razonadamente todas las funciones enteras f tales que

$$|3f'(z)f(z)^2| \le |z|^2, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$