Variable Compleja I, UAM **Grupo de 4^{o} de Doble Titulación Matemáticas - Informática**

EXAMEN FINAL, CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JUNIO DE 2019

Inicial del primer apellido:

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

D.N.I./PASAPORTE ____________ FIRMA ____________

En este examen se pide:

- justificar todas las respuestas de manera clara y concisa,
- mostrar los detalles del trabajo,
- nombrar los teoremas y las fórmulas que se utilicen y comprobar que es justificado su uso.

La puntuación máxima total es de 10 puntos.

PUNTUACIONES:

1. [1,5 puntos] Razone brevemente las respuestas a las siguientes preguntas.

   (a) ¿Existe f holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y tal que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \cup \mathbb{R}$?

   (b) Determine todas las funciones f holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ tales que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$.

2. [1,5 puntos] Encuentre razonadamente todas las funciones enteras f que satisfagan la ecuación funcional $f(2z) = f(z) - f(-z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. [1,5 puntos]

(a) Encuentre la transformación de Möbius (lineal fraccionaria) T con las siguientes propiedades:

$$T(1) = i, \quad T(-1) = -i, \quad T(i) = \infty.$$

(b) Halle razonadamente el dominio $T(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ denota al disco unidad.

4. [1,5 puntos] Sea f una función entera tal que $|f(z)| \geq \dfrac{2+|z|}{1+|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es constante.

5. [1,5 puntos] Supongamos que f es analítica en el disco unidad $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq |z+2|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Se pide demostrar que $|f'(0)| \leq 2$ e identificar todas las funciones para las que se cumple la igualdad.

6. [2,5 puntos] Usando métodos complejos, calcule el valor de la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4}\, dx\,.$$

Justifique todos los detalles relevantes de la solución: la elección de la función a integrar y del camino de integración, la discusión de las singularidades pertinentes y de sus residuos y los límites relevantes.