Apuntes y ejercicios resueltos:

Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

Recordemos que una función se denomina *entera* si es holomorfa en todo el plano. De la versión básica de la fórmula integral de Cauchy (para las circunferencias) se deduce que toda función entera se puede desarrollar en serie de potencias convergente en todo el plano (por ejemplo, centrada en el origen):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \tag{1}$$

donde C es cualquier circunferencia de radio positivo y finito, centrada en el origen y con orientación positiva.

En clase hemos visto que las funciones complejas seno y coseno, que son obviamente enteras, no se pueden acotar por uno en módulo y, de hecho, ni siquiera están acotadas en el plano. Este fenómeno es generalizado, como muestra el siguiente resultado básico (que también es una consecuencia de la fórmula integral de Cauchy).

Teorema de Liouville. *Toda función entera y acotada es constante.*

Comentario: de hecho, es suficiente pedir que esté acotada en un entorno del infinito: $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ ya que la función continua $|f|$ está siempre acotada en el disco compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$.

Este resultado tiene numerosas aplicaciones; por ejemplo, en clase vimos que se puede deducir de él el Teorema fundamental del álgebra. También se puede utilizar en numerosos ejemplos: construyendo funciones auxiliares, nos permite extraer información adicional no aparente de diversas condiciones donde una función se acota por otras.

Problema 1 *Sean f y g dos funciones enteras tales que $|f(z)| < |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué relación existe entre f y g?*

SOLUCIÓN. Puesto que $0 \le |f(z)| < |g(z)|$ en $\mathbb{C}$, se sigue que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego podemos definir en todo el plano la función $h(z) = f(z)/g(z)$. Esta función es entera y satisface la condición $|h(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, $h \equiv cte = \lambda$; es decir, $f(z) = \lambda g(z)$. Además, por la desigualdad impuesta, se sigue que $|\lambda| < 1$.

Recíprocamente, es inmediato que toda función de la forma $g(z) = \lambda f(z)$ con $|\lambda| < 1$ cumple la condición $|f(z)| < |g(z)|$ para todo z. ■

Problema 2 *Pruebe que una función entera f satisface*

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+i) = f(z) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}$$

si y sólo si f es una función constante.

SOLUCIÓN. Es fácil probar por inducción que

$$f(z+m)=f(z), \quad f(z+in)=f(z)$$

para todo m, $n \in \mathbb{N}$. Luego, poniendo $z-m$ y $z-in$ respectivamente en vez de z, vemos que las mismas ecuaciones se cumplen para todo m, $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera vemos que los valores que toma f en el plano son los que toma en un cuadrado cualquiera de lado uno, por ejemplo, en

$$Q=\{z=x+yi:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}.$$

Puesto que el conjunto Q es compacto y f es continua ahí, su módulo alcanzará su máximo en Q. Por tanto, existe una constante positiva y finita M tal que

$$|f(z)|\le M, \quad \text{para todo } z\in Q.$$

Debido a la periodicidad de f observada arriba, se sigue que

$$|f(z)|\le M, \quad \text{para todo } z\in \mathbb{C}.$$

Por tanto, f es entera y está acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, $f\equiv cte$.

En la dirección recíproca, es obvio que si f es constante entonces cumple ambas condiciones

$$f(z+1)=f(z), \qquad f(z+i)=f(z). \qquad \blacksquare$$

También es útil la siguiente generalización del teorema de Liouville, que se puede deducir fácilmente de la fórmula para a_n en (1).

Estimaciones de Cauchy. *Si f es una función entera y cumple $|f(z)|\le M|z|^\alpha$ para ciertos números $a>0$, $M>0$ y para todo z tal que $|z|>R>0$, entonces f es un polinomio de grado, como mucho, $[\alpha]$.*

Aquí, como es habitual, $[\alpha]$ denota la parte entera de α, es decir, el único número entero n tal que $n\le\alpha<n+1$. Por ejemplo, $[\pi]=3$ y $[-\sqrt{2}]=-2$.

Problema 3 *Si f es una función entera que cumple*

$$|f(z)|\le \frac{3104\cdot|z|^{4,7}}{|z|^2+3}, \quad |z|\ge 1,$$

demuestre que sólo puede ser o una constante, o una función lineal o un polinomio cuadrático.

SOLUCIÓN. Observando que

$$\frac{|z|^2}{|z|^2+3}\le 1$$

para todo z, se sigue que

$$|f(z)|\le \frac{3104\cdot|z|^{4,7}}{|z|^2+3}\le 3104|z|^{2,7}, \quad |z|\ge 1.$$

Por las estimaciones de Cauchy, concluimos que f es un polinomio de grado, como mucho, $[2,7]=2$ (y, por tanto, constante, lineal o cuadrático).

Problema 4 *Identifique todas las funciones enteras, f, que cumplan*

$$|f(z)| \le |ze^z| \qquad \textit{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN. Puesto que $e^z \ne 0$ en $\mathbb{C}$, podemos definir la función $g(z) = f(z)/e^z$. Esta función es entera y satisface la condición $|g(z)| \le |z|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Por las estimaciones de Cauchy, g es una función lineal: $g(z) = Az+B$; es decir, $f(z) = (Az+B)e^z$. Además, por la desigualdad impuesta, se sigue que $|Az+B| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular, la elección $z = 0$ nos da que $|B| \le 0$, luego $B = 0$ y se sigue que $|Az| \le |z|$ para todo z, así que $|A| \le 1$.

La conclusión final es que $f(z) = Aze^z$, con $|A| \le 1$. Recíprocamente, es inmediato que toda función de esta forma cumple la condición $|f(z)| \le |ze^z|$ para todo z. ■

Principio de los ceros aislados (teorema de unicidad)

Teorema. *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Supongamos que $f(z_n) = 0$ para una sucesión infinita de puntos, $z_n \in \Omega$, convergente a un punto $a \in \Omega$ (siendo todos los $z_n \ne a$). Entonces $f \equiv 0$ en Ω.*

Es fácil comprobar que este enunciado es equivalente al siguiente:

Teorema de unicidad. *Sea Ω un dominio en el plano y f y g dos funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $f(z_n) = g(z_n)$ para una sucesión infinita de puntos, $z_n \in \Omega$, convergente a un punto $a \in \Omega$ (siendo todos los $z_n \ne a$). Entonces $f \equiv g$ en Ω.*

Otra manera equivalente de expresar lo mismo es como sigue:

Principio de los ceros aislados. *Si Ω es un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω, no idénticamente nula, entonces los ceros de f no se pueden acumular en ningún punto de Ω. Es decir, los ceros de f son todos aislados: para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existe $r > 0$ tal que $f(z) \ne 0$ cuando $0 < |z-a| < r$.*

Observación. Como corolario, la cantidad de ceros que tiene cualquier función analítica (no idénticamente nula) es finita o numerable.

Es importante resaltar que sí es posible que los ceros de una función holomorfa no idénticamente nula se acumulen en alguno o en muchos puntos del borde del dominio. Un ejemplo sencillo sería la función $f(z) = \operatorname{sen}(\pi/z)$, holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y obviamente no idénticamente nula allí. Sus ceros son precisamente los puntos $1/n$, $n \in Z$ que se acumulan en el punto $0 \in \partial\Omega$.

Ejemplo 1 *Sabiendo sólo que f es holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, y que*

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

se deduce que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$ ya que los puntos $1/(n+1)$ todos están en $\mathbb{D}$, son distintos dos a dos y convergen al punto 0 que también está en $\mathbb{D}$.

Suponiendo que f se anula en los números irracionales en el intervalo $(4/5, 1) \subset \mathbb{D}$, obtendríamos la misma conclusión porque los irracionales son densos en dicho intervalo y contienen una sucesión de números que converge a $9/10$, por ejemplo (no vale con una sucesión convergente a 1 porque el punto 1 no está en $\mathbb{D}$).

Problema 5 *Halle todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$ y que allí satisfagan la condición*

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

SOLUCIÓN. Consideremos los puntos $z_n = n/(n+1)$. Despejando n de la igualdad $z_n = n/(n+1)$, obtenemos que $n = z_n/(1-z_n)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de arriba, se obtiene

$$f(z_n) = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right)^2 + 2\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right) + 1} = 1 - \frac{(1-z_n)^2}{2z_n^2 + 2z_n(1-z_n) + (1-z_n)^2} = 1 - \frac{(1-z_n)^2}{1+z_n^2} = \frac{2z_n}{1+z_n^2}.$$

Esto nos sugiere una función que obviamente cumple esta condición:

$$f(z) = \frac{2z}{1+z^2}.$$

¿Puede haber otras funciones con las mismas propiedades? Veremos que no.

Todos los puntos z_n están en el disco $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$; además, $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ y este límite también está en $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$. Según el Teorema de unicidad, si dos funciones holomorfas en el disco indicado coinciden en todos los puntos z_n, entonces coinciden en todo el disco. Por tanto, la función encontrada es la única con dicha propiedad. ■

Problema 6 *Halle todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ que satisfagan la condición $f(z) = f(z^2)$, para todo $z \in \mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. Sea $a \in \mathbb{D}$ arbitrario; entonces $|a| < 1$ y, por tanto, lo mismo es cierto para todo a^k, $k \in \mathbb{N}$; además, $\lim_{k\to\infty} |a^k| = \lim_{k\to\infty} |a|^k = 0$. Aplicando la condición $f(z) = f(z^2)$ a los puntos $z = a$, $z = a^2$, $z = a^4$, etc. sucesivamente, obtenemos que

$$f(a) = f(a^2) = f(a^4) = f(a^8) = \dots$$

y, en general, $f(a^{2^n}) = f(a)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $a^{2^n} \in \mathbb{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^{2^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $0 \in \mathbb{D}$, el Principio de los ceros aislados nos dice que $f \equiv f(a) = cte$ en $\mathbb{D}$.

Existe, al menos, una solución alternativa. Puesto que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, podemos escribir f como una serie de potencias convergente en $\mathbb{D}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

La condición $f(z) = f(z^2)$ nos dice que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + + a_5 z^5 + a_6 z^6 + \dots = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + + a_3 z^6 + a_4 z^8 + \dots$$

Teniendo en cuenta la unicidad de la serie de Taylor y comparando los coeficientes a ambos lados, se deduce que

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0, \qquad a_2 = a_1, a_4 = a_2, a_6 = a_3, a_8 = a_4, \dots$$

y, por tanto, $a_k = 0$ para todo $k \geq 1$, luego $f \equiv cte$. ■

Preparado por Dragan Vukotić,

profesor de un grupo de la asignatura en varias ocasiones