Variable Compleja I, CURSO 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

ENTREGA 9 DE PROBLEMAS

Teorema de unicidad (principio de los ceros aislados)

59) Halle razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$ y que allí satisfagan la condición

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

60) Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Demuestre que no existe ninguna función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$$

para $n = 2, 3, 4\ldots.$

61) Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{1}{2^n} \qquad \text{para} \qquad n \ge 2,$$

entonces f es idénticamente cero en $\mathbb{D}$.
Sugerencia: Como $f(0) = 0$, entonces $f(z) = z^k g(z)$ con $g(z)$ holomorfa en $\mathbb{D}$ y $g(0) \ne 0$. Compruebe que ésto es imposible.

62) Halle todas las funciones enteras f tales que $f(z) = f(z^2)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

63) Halle todas las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$f(z^2) = f(z) + z, \text{ y } f(0) = 0 \tag{*}$$

Compruebe que no existe ninguna función entera que satisfaga (*).

Teorema y fórmula integral de Cauchy: ejercicios adicionales

64) Sea γ la circunferencia unidad orientada positivamente. Calcule las siguientes integrales:

$$\text{(i)} \int_\gamma z \operatorname{sen} z^2 \, dz, \qquad \text{(ii)} \int_\gamma \frac{1-\cos z}{z^2} \, dz.$$

65) Calcule las siguientes integrales trigonométricas usando la integración sobre la circunferencia unidad y la fórmula integral de Cauchy:

$$\textbf{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t} \, dt, \qquad \textbf{b)} \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\operatorname{sen} t) \, dt.$$