# Variable Compleja I, Curso 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

## Entrega 8 de problemas

### Integración compleja. Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias

**48)** Calcule $\int_\gamma |z|\overline{z}\,dz$, donde $\gamma$ es el camino cerrado compuesto por la semicircunferencia superior de $|z|=1$ y el segmento $-1\le x\le 1$; $y=0$, con orientación positiva.

**49)** Sea $\gamma$ el arco de la circunferencia $|z|=2$ comprendido en el primer cuadrante. Deduzca las siguientes estimaciones

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{\pi}{3}, \qquad \left|\int_\gamma \cos z\,dz\right| \le \frac{\pi}{2}\left(e^2+e^{-2}\right).$$

**50)** Sea $f$ una función compleja continua en el disco abierto $D(a;R)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|<R\}$ (ojo: no se supone la holomorfía de $f$). Si $0<\varepsilon<R$ y $C_\varepsilon$ la circunferencia $\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|=\varepsilon\}$ orientada positivamente, usando las estimaciones básicas para las integrales de línea, demuestre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

**51)** Demuestre que si $f$ es holomorfa en un dominio $\Omega$ que contiene al disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}=\{z:\ |z|\le 1\}$ y si $f(z)=0$ cuando $|z|=1$, entonces $f(z)=0$ para todo $z\in\overline{\mathbb{D}}$.

**52)** Calcule las siguientes integrales, aplicando la versión básica de la fórmula integral de Cauchy para circunferencias:

$$\textbf{a)}\int_{|z|=1}\frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz, \qquad \textbf{b)}\int_{|z|=1}\frac{z^2+2}{z(z-3)}\,dz, \qquad \textbf{c)}\int_{|z-1|=2}\frac{dz}{z^2+3i}, \qquad \textbf{d)}\int_{|z|=1}\frac{2}{1-4z^2}\,dz.$$

Todas las circunferencias tienen orientación positiva. (**Ayuda:** Conviene identificar ciertas funciones holomorfas en los dominios apropiados, usando fracciones simples donde sea necesario.)

**53)** Demuestre que si $a,b\in\mathbb{C}$ y $R>0$ es tal que $|a|<R$, $|b|<R$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Luego use esta fórmula para probar el Teorema de Liouville: *toda función entera y acotada es constante.* (**Ayuda:** Use fracciones simples y después haga que $R\to+\infty$.)

### Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

**54)** Demuestre las siguientes afirmaciones.

**a)** Si $f$ es entera y para algún $a\in\mathbb{C}$ y $r>0$ se tiene $|f(z)-a|\ge r$, para todo $z\in\mathbb{C}$, entonces $f$ es constante.

**b)** Concluya que si $f$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y no constante, entonces, $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

**Sugerencia**: Aplique el teorema de Liouville a la función adecuada.

**55)** Si $f$ es entera y cumple

$$|f(z)| \leq \pi e^{2\operatorname{Re} z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, demuestre que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = ae^{2z}$.

**56)** Determine razonadamente todas las funciones enteras $f$ (holomorfas en $\mathbb{C}$) tales que

$$|f(z)| \leq \frac{2019\,|z|^2}{|z|^2+1}, \qquad \text{para } |z| \geq 200\,.$$

**57)** Sea $f$ una función entera. Si $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, demuestre que $f$ es constante.

**58)** Demuestre que si una función entera $f$ satisface

$$f(z+1) = f(z)\,, \qquad f(z+i) = f(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f$ es una función constante.

**Sugerencia**: Use el teorema de Liouville.