Variable Compleja I, CURSO 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

ENTREGA 7 DE PROBLEMAS

Funciones armónicas. Derivadas de Wirtinger

39) ¿Para qué valores de los parámetros reales a, b, c, d es armónica la función

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3\,?$$

40) Halle la conjugada armónica de la función $u(x,y) = \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en el semiplano $\{(x,y):\ x>0\}$.

41) a) Encuentre todas las funciones armónicas de la forma $g(ax+by)$ donde g es una función real de clase C^2. ¿Qué funciones holomorfas tienen por parte real las funciones halladas?

b) Encuentre todas las funciones armónicas de la forma $h(x^2+y^2)$ donde h es una función real de clase C^2.

42) Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial z}$, $\dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}}$ y Δh para las siguientes funciones:

a) $h(z) = iz + \overline{z}^2$, **b)** $h(z) = |z|$; **c)** $h(z) = |f(z)|^4$, donde $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

Raíces, logaritmos y potencias complejas

43) Calcule todos los valores de las siguintes raíces complejas:

a) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, **b)** $(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{1/3}$, **c)** $\sqrt[4]{1-i}$.

44) Tomando la rama principal del logaritmo, calcule todos los posibles valores de

a) $\log e$, **b)** $\log(\sqrt{3}+i)$, **c)** $2^{\pi i}$, **d)** $(1-i)^i$.

45) Resuelva las siguientes ecuaciones: **a)** $\cos z = 2$; **b)** $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

46) Para la función f dada, elija un dominio adecuado Ω de manera que f sea holomorfa en Ω y después calcule la derivada f'.

a) $f(z) = z^{2z}$, **b)** $f(z) = \operatorname{sen}\sqrt{z}$, **c)** $f(z) = \log(1-z)$, **d)** $f(z) = \sqrt{e^z+1}$.

47) (Teorema del binomio para exponentes reales.) Sea α un número real con $\alpha \notin \mathbb{N}$ y definamos

$$\binom{\alpha}{0} = 1\,, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha\,, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \quad \text{si } j>1\,.$$

a) Demuestre que el radio de convergencia de la serie $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ es 1.

b) Compruebe que $(1+z)F'(z) = \alpha F(z)$ en $\mathbb{D} = \{z:\ |z|<1\}$.

c) Concluya que $F(z) = (1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ si $|z|<1$, tomando la determinación principal de w^α.