Variable Compleja I, CURSO 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

ENTREGA 5 DE PROBLEMAS

Series de potencias

25) Halle el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$, **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$, **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

26) Lo mismo para las siguientes series:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n^n}$, **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$, **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$, **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$,

27) Calcule el radio de convergencia y la suma de las siguientes series de potencias:

$$\textbf{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}, \qquad \textbf{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!}, \qquad \textbf{c)} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n.$$

28) Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ¿qué representan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n$ en términos de f?

29) Escriba explícitamente la función cuya serie de potencias es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$ y calcule $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!}$. (**Ayuda:** Evalúe la función exponencial en los puntos $\pm z$ y $\pm iz$.)

30) Desarrolle en series de potencias (centradas en el origen) las siguientes funciones elementales:

$$(1-z)\cos z, \qquad \frac{e^{-z}}{1+z}, \qquad \frac{\operatorname{sen} z}{1-z^2}.$$

indicando en cada caso el radio de convergencia.

31) Desarrolle las siguientes funciones en series potencias del tipo indicado:

a) $\dfrac{z}{z^2-5z+6}$ y $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ en potencias de z; **b)** $\dfrac{2z+3}{(z+1)^2}$ en potencias de $z-1$.

32) Supongamos que la serie de potencias $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tiene radio de convergencia $R=1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$. Denotemos

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{y} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

a) Demuestre que $s_n(z) = (1-z)\sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n$ y concluya que $f(z) = (1-z)\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n z^n$.

b) Demuestre que $f(z) \to 0$ cuando z se aproxima a 1 dentro de una región contenida en el disco unidad y en la que $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ está acotado.