Variable Compleja I (CURSO 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid)

4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

ENTREGA 4 DE PROBLEMAS

Topología del plano y del plano extendido. La esfera de Riemann

RECORDATORIO:
La esfera de Riemann y el plano extendido. Se considera $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde el papel del punto en el infinito añadido al plano se explica como sigue. Sea $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ la esfera unidad y $\mathbf{N} = (0,0,1)$ el "polo norte". La proyección estereográfica se define como sigue:

$$P : \mathbb{S}^2 \to \hat{\mathbb{C}}, \quad P(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}, & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{N} \\ \infty, & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{N}. \end{cases}$$

Se ha comprobado en clase que P es una aplicación biyectiva entre $\mathbb{S}^2$ y $\hat{\mathbb{C}}$ y que

$$P^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$

Sea $\rho(z,w)$ la distancia (en $\mathbb{R}^3$) entre $P^{-1}(z)$ y $P^{-1}(w)$ para $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$. Entonces:

$$z_n \to z \text{ en } \hat{\mathbb{C}} \iff \rho(z_n, z) \to 0$$

Se definen los entornos de ∞ como aquellos que contienen un conjunto de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para algún $R > 0$. Con estos entornos, $z_n \to \infty$ quiere decir que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, es decir:

Para todo $R > 0$ existe N tal que $|z_n| > R$ para todo $n > N$.

17) a) Demuestre razonadamente (usando subsucesiones y trigonometría elemental) que la sucesión z^n no tiene límite para ningún número $z \neq 1$ con $|z| = 1$.

b) Decida razonadamente cuál de las siguientes sucesiones tienen límite (finito o infinito):

$$z_n = \left(\frac{1-2i}{3} \right)^n, \qquad w_n = n^{5/4} \operatorname{sen} \frac{1}{n} + i \operatorname{sen} n.$$

18) Sea P^{-1} la transformación inversa de la proyección estereográfica, definida como arriba. Halle las imágenes por P^{-1} (en la esfera de Riemann) de los conjuntos definidos por las siguientes desigualdades:

i) $\operatorname{Im} z = 0$, **ii)** $\operatorname{Re} z < 1$, **iii)** $|z| < 1$, **iv)** $|z| > 2$.

19) Sea P la proyección estereográfica, definida como arriba.

a) Demuestre que P transforma las circunferencias sobre la esfera en circunferencias o rectas del plano.

b) ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

Funciones de una variable compleja: límites y continuidad

20) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$, demuestre que entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{si } n = m \\ \infty, & \text{si } n > m. \end{cases}$$

21) Halle los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4 - 1}{z - i} & \text{si } z \neq i \\ 4i & \text{si } z = i, \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \le 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

RECORDATORIO.
En clase hemos definido la función exponencial compleja como sigue:

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

22) Demuestre las siguientes propiedades de la función exponencial:

a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. **b)** No existe $\lim_{z\to\infty} e^{-z}$.

Las converencias puntual y uniforme de series de funciones

23) ¿Para qué valores de z convergen las siguientes series? Razone la respuesta, aplicando los criterio adecuados (el de término general, el de Weierstrass, etc.).

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nz}$, **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

24) Como veremos más adelante, podemos definir el valor principal de la función compleja n^z como sigue:

$$n^z = e^{(\log n)z},$$

donde $\log n$ es el valor habitual ya conocido del logaritmo de un número natural (al que en este curso vamos a dar un significado más amplio). Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ para $z \in \mathbb{C}$.

a) Demuestre que la serie converge si $\operatorname{Re} z > 1$.

b) Demuestre que si a es un número real con $a > 1$ entonces la serie converge uniformemente en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \ge a\}$.

Nota: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ es la *función Zeta de Riemann.* Puede definirse en un dominio mucho más amplio que el que indicamos arriba pero para ello tenemos que desarrollar más conocimientos teóricos.