# Variable Compleja I, Curso 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Entrega 12 de problemas

## Teorema de la aplicación abierta, principio del módulo máximo

**85)** Determine razonadamente todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que $\operatorname{Re} f(z) \cdot \operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z$ en el disco.

**86)** Sea $\Omega$ es un dominio en el plano y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

**a)** Si $|f(z)| \equiv cte$ en $\Omega$, demuestre que $f \equiv cte$ en $\Omega$.

**b)** Si $\operatorname{Re} f \equiv 0$ en $\Omega$, demuestre que $f$ es una constante puramente imaginaria.

**87)** Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{C}$ y $\gamma$ un contorno contenido en $\Omega$ junto con su dominio interior. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $|f| \equiv 1$ en $\{\gamma\}$, demuestre que entonces bien $f$ tiene algún cero en el interior de $\gamma$, bien $f$ es constante en $\Omega$. (**Ayuda:** Aplique el Principio del módulo máximo a $1/f$.)

## Lema de Schwarz, transformaciones de Möbius y automorfismos del disco

**88)** Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = f'(0) = 0$. Demuestre que $|f(z)| \le |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$. (**Sugerencia:** Aplique el lema de Schwarz dos veces.)

**89)** Pruebe el Lema de Schwarz-Pick: si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es holomorfa, entonces $|f'(w)| \le \dfrac{1-|f(w)|^2}{1-|w|^2}$, $\forall\, w \in \mathbb{D}$. Estudie cuándo se tiene la igualdad.

**Ayuda:** Para demostrar la desigualdad para $w = a$ y $b = f(a)$ apropiados, conviene aplicar el Lema de Schwarz a la composición $\phi_b \circ f \circ \phi_a$, donde $\phi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es el automorfismo involución definido por $\phi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$, para $a \in \mathbb{D}$.

## Aplicaciones conformes

**90)** Describa la imagen mediante la función exponencial de $\Omega = \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

**91)** Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ de los siguientes conjuntos (en $\hat{\mathbb{C}}$):

**a)** $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$; **b)** $\{iy : y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$; **c)** $\mathbb{D}$; **d)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$; **e)** $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.

**92)** Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1}{z}$ de los siguientes dominios:

**a)** $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; **b)** $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$.

**93)** Halle una transformación de Möbius $T$ tal que $T(i) = -i$, $T(0) = 0$ y $T(-1) = \infty$.

**94)** Determine la imagen del disco unidad $\mathbb{D}$ por la función $f(z) = \log \dfrac{1+z}{1-z}$.

**95)** Usando las transformaciones de Möbius adecuadas y la función $f(z) = z^2$ donde sea necesario, halle una aplicación holomorfa y biyectiva del semidisco superior $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z| < 1\}$ sobre: **a)** el primer cuadrante; **b)** el semiplano superior; **c)** el disco unidad $\mathbb{D}$.

**96)** Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva de $\Omega_1$ sobre $\Omega_2$ en los siguientes casos:

**a)** $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

**b)** $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$.