Variable Compleja I, CURSO 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

ENTREGA 11 DE PROBLEMAS

Cálculo de residuos. Teorema de los residuos y sus aplicaciones cuantitativas

74) Evalúe la integral $\int_\gamma z^n e^{1/z} dz$, donde $n \in \mathbb{N}$ y γ es un contorno (orientado positivamente) alrededor del origen.

75) Calcule las siguientes integrales: (i) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1+z}{1-\cos z} dz$, (ii) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2-z+1}$, $r \neq 1$.

76) Demuestre razonadamente que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a+\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$, donde $a>0$.
(Sugerencia: Use la simetría de la función seno para convertir la integral en un múltiplo de la integral desde 0 hasta 2π, para después expresar la cantidad obtenida como integral de una función compleja a lo largo de la circunferencia unidad.)

77) Demuestre la siguiente igualdad utilizando el teorema de los residuos (con una elección adecuada del contorno): $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$.

78) Sea $R>3$ y γ_R la semicircunferencia centrada en el origen y situada en el semiplano inferior, desde $-R$ hasta R.
(a) Obtenga una estimación para la integral $J_R = \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+9i}$ y luego deduzca que $\lim_{R\to+\infty} J_R = 0$.
(b) Añada el intervalo desde R hasta $-R$ para cerrar la curva y utilice el apartado anterior y el teorema de los residuos (o la fórmula integral de Cauchy) para deducir las siguientes fórmulas:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+81} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+81}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{54}.$$

79) Calcule la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}$.

80) Compruebe la siguiente igualdad: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi p}{2}\right)^{-1}$, donde $-1<p<1$.

Principio del argumento. Teorema de Rouché

81) ¿Cuántos ceros tiene la ecuación $e^z - 4z^n + 1 = 0$ en el disco unidad?

82) Halle el número de ceros de la función holomorfa $f(z) = z^4 - 12z^2 + 15z + i$:
(a) en el disco unidad; (b) en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; (c) en el resto del plano.

83) Encuentre razonadamente todos los polinomios mónicos: $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ para los cuales $|p(z)| < 1$ para todo z en la circunferencia unidad.

84) Demuestre que el polinomio $p(z) = z^4 + iz + 1$ tiene exactamente dos ceros en el semiplano superior $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.