Variable Compleja I, CURSO 2018-19, Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

ENTREGA 10 DE PROBLEMAS

Función primitiva. Teorema de Green. Teoremas integrales generalizados

66) Sea γ una curva C^1 a trozos desde el origen hasta el punto $-i$. Calcule las integrales

$$\textbf{a)}\ \int_\gamma e^{-z}\,dz, \qquad \textbf{b)}\ \int_\gamma \frac{dz}{z+1}.$$

67) Sea $P(z)$ un polinomio y sea γ la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ orientada positivamente. Pruebe que

$$\int_\gamma \overline{P(z)}\,dz = 2\pi i R^2 \overline{P'(0)}.$$

68) Sea γ un contorno (curva simple y cerrada, C^1 a trozos) que encierra un área S. Demuestre que

$$S = \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\,dz.$$

69) Sea γ una curva simple, cerrada y C^1 a trozos, contenida en el segundo cuadrante (abierto). Calcule las siguientes integrales, justificando las respuestas:

$$\textbf{a)}\ \int_\gamma \frac{z^2\cos z}{z-3i}\,dz, \qquad \textbf{b)}\ \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z\,dz}{(z+2)^3}, \qquad \textbf{(c)}\ \int_\gamma \frac{1-\cos z}{z^4}\,dz.$$

70) Consideremos la curva cerrada y suave $\gamma : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{C}$, parametrizada como sigue:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \cos t + i\operatorname{sen} t, & \text{si } t \in [-2\pi, 0] \\ 1 + 2\cos 3t + 2i\operatorname{sen} 3t, & \text{si } t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Calcule las siguientes integrales, razonando la respuesta:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z-2-i}\,dz, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z-2-2i}\,dz.$$

Singularidades aisladas. Series de Laurent

71) Clasifique las singularidades de las siguientes funciones por su tipo y calcule los residuos correspondientes:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{z^2+2z+1}; \quad \textbf{b)}\ \frac{1}{z^3-1}; \quad \textbf{c)}\ \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}; \quad \textbf{d)}\ \frac{z^2}{\operatorname{sen} z}; \quad \textbf{e)}\ \operatorname{sen}\frac{1}{z^2}.$$

72) Halle los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en las coronas indicadas:

$$\textbf{a)}\ \cos\frac{1}{z},\quad 0 < |z| < +\infty, \qquad \textbf{b)}\ z^2 e^{1/(1-z)},\quad 0 < |z-1| < +\infty; \qquad \textbf{c)}\ \frac{1}{z^2+4z+3},\quad 1 < |z| < 3.$$

73) Sean f y g dos funciones holomorfas en $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$. Demuestre que si f tiene un cero de orden n y g tiene un cero de orden $n+1$ en el punto a, entonces f/g tiene un polo simple en a. Calcule el residuo.