Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 4, 08/05/2019

NOMBRE: ____________ APELLIDOS: ____________

D.N.I. O PASAPORTE: ____________ FIRMA: ____________

Modelo A

Puntuación máxima: 10 puntos. No se permite el uso de apuntes ni calculadoras.

---

1. [1,5 puntos] En esta pregunta NO se pide mostrar ningún trabajo. Elija y marque unícamente una respuesta de entre las ofrecidas abajo.

No puntuarán respuestas incorrectas, múltiples o en blanco.

Contando las multiplicidades, determine el número de ceros de la función $P(z) = z^3 + 4z^2 + 5$ en el disco $D(0;2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4; $\gamma = \partial D(0;2)$

(F) 5; (G) 10; (H) 16; (I) Ninguno de los anteriores.

$|z|=2 \Rightarrow |4z^2| = 16 > 13 = 8+5 = |z^3|+5 \geq |z^3+5| \Rightarrow 2 = N_\gamma(4z^2) = N_\gamma(P)$ (Rouché)

El resto del examen es de desarrollo; se pide explicar las soluciones y justificar las respuestas.

2. [2,5 puntos] Evalúe razonadamente la integral

$$\int_\gamma z^n e^{1/z}\, dz,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y γ es una curva C^1 a trozos, simple y cerrada (orientada positivamente) alrededor del origen.

$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots + \frac{w^n}{n!} + \dots$, $w \in \mathbb{C} \Rightarrow \forall z \neq 0$,

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \frac{1}{(n+1)! z^{n+1}} + \dots$$

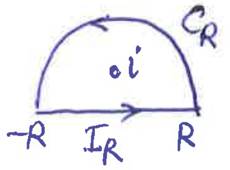
$$\Rightarrow z^n e^{\frac{1}{z}} = z^n + z^{n-1} + \frac{z^{n-2}}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{z} + \dots$$ (serie de Laurent de $z^n e^{\frac{1}{z}}$ en $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$

$$\Rightarrow \int_\gamma z^n e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z^n e^{\frac{1}{z}}; 0) = 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

($z=0$ es la única singularidad aislada de $z^n e^{\frac{1}{z}}$)

3. [6 = 1 + 2 + 2 +1 puntos] Dado $R>1$, consideremos el contorno $\gamma_R = I_R + C_R$, orientado positivamente y compuesto por el intervalo $I_R=[-R,R]$ del eje real y por la semicircunferencia $C_R=\{z=Re^{it}: 0\le t\le \pi\}$.

(a) Determine todas las singularidades aisladas de la función $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$ dentro del dominio acotado por γ_R, indicando razonadamente el tipo de cada singularidad.



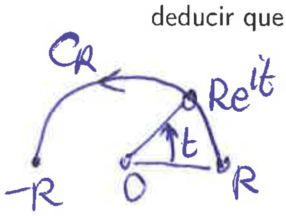
$z^2+1=(z-i)(z+i) \Rightarrow$ la única singularidad de f en $D_{int}(\gamma_R)$ es $z=i$ (p.q. $R>1$). Obsérvese que $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-i}$, donde $g(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z+i}$ es holomorfa y $\neq 0$ en ~~el~~ dominio $\mathbb{C}\setminus\{-i\} \supseteq \{i\}\cup D_{int}(\gamma_R)$. $z=i$ es un polo simple.

(b) Calcule el residuo de f en cada uno de las singularidades encontradas, indicando la fórmula usada.

$$\mathrm{Res}(f;i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i} g(z)=\frac{ie^{-1}}{2i}=\frac{1}{2e}.$$

(Fórmula para el residuo en un polo simple)

(c) Usando los métodos vistos en clase (tales como las estimaciones para las funciones racionales o el Lema de Jordan), obtenga una acotación tan precisa como sea posible para el valor $\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|$ que permita deducir que $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$.



$z\in C_R \Rightarrow z=Re^{it},\ 0\le t\le\pi \Rightarrow dz=Rie^{it}dt$

$\Rightarrow |dz|=R\,dt$; también $|f(z)|=\dfrac{|z|\,|e^{iz}|}{|z^2+1|}\le\dfrac{|z|}{|z|^2-1}e^{\mathrm{Re}\{iz\}}$

$iz=iRe^{it}=iR(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t)=-R\,\mathrm{sen}\,t+iR\cos t$

$\Rightarrow e^{\mathrm{Re}\{iz\}}=e^{-R\,\mathrm{sen}\,t} \Rightarrow \left|\int_{C_R}f(z)dz\right|\le\int_{C_R}|f(z)||dz|\le\dfrac{R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}dt$

$<\dfrac{R^2}{R^2-1}\dfrac{\pi}{R}=\dfrac{\pi R}{R^2-1}\longrightarrow 0,\ R\to+\infty.$

Por el Lema de Jordan (visto en clase y en los apuntes)

(d) Utilice los resultados obtenidos en los apartados anteriores para evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+1}dx.$$

Teorema de los residuos $\Rightarrow$

$2\pi i\,\mathrm{Res}(f;i)=2\pi i\cdot\dfrac{1}{2e}$ (apartado (b)) $=\dfrac{\pi i}{e}=\int_{\gamma_R}f(z)dz$

$=\int_{I_R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz \xrightarrow[(R\to+\infty)]{\text{aptdo.(c)}} \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx+0=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+1}dx$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+1}dx=\dfrac{\pi}{e}.$ (Por supuesto, $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}dx=0$ ya que la función es impar.)

Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 4, 08/05/2019

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ______________________________________

D.N.I. O PASAPORTE: ____________________ FIRMA: ______________________________

Modelo B

Puntuación máxima: 10 puntos. No se permite el uso de apuntes ni calculadoras.

---

1. [1,5 puntos] En esta pregunta NO se pide mostrar ningún trabajo. Elija y marque unícamente una respuesta de entre las ofrecidas abajo.

No puntuarán respuestas incorrectas, múltiples o en blanco.

Contando las multiplicidades, el número de ceros de la función $h(z) = 2e^z + 11z^4 + 3z^{13} + 1$ en el disco unidad es:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4; $\gamma = \partial D$

(F) 10; (G) 11; (H) 13; (I) Ninguno de los anteriores.

(Conviene recordar que $2 < e < 3$.) Rouché

$|z|=1 \Rightarrow |11z^4| = 11 > 10 > 2e+3+1 \geq 2e^{|z|}+3|z|^{13}+1 \geq |2e^z+3z^{13}+1| \Rightarrow 4 = N_\gamma(11z^4) = N_\gamma(h).$

El resto del examen es de desarrollo; se pide explicar las soluciones y justificar las respuestas.

2. [2,5 puntos] Evalúe razonadamente la integral

$$\int_\gamma \frac{1-\cos z}{z^7}\,dz,$$

donde γ es una curva C^1 a trozos, simple y cerrada (orientada positivamente) alrededor del origen.

SOLUCIÓN 1.

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots$ (serie de Taylor en $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \dots$

$\Rightarrow \frac{1-\cos z}{z^7} = \frac{1}{2!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{4!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{6!}\frac{1}{z} - \frac{z}{8!} + \dots$ (serie de Laurent en $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$)

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1-\cos z}{z^7}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1-\cos z}{z^7}; 0\right) = 2\pi i \cdot a_{-1} = \frac{2\pi i}{6!} \left(= \frac{\pi i}{360}\right).$

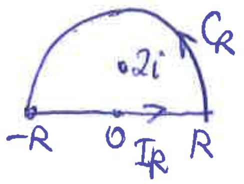
SOLUCIÓN 2. Fórmula integral de Cauchy para las derivadas:

$f^{(6)}(0) = \frac{6!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^7}\,dz$; $f(z) = 1 - \cos z \Rightarrow f'(z) = \operatorname{sen} z$; $f''(z) = +\cos z$, $f'''(z) = -\operatorname{sen} z$, ...

$f^{(VI)}(z) = \cos z \Rightarrow f^{(VI)}(0) = 1 \Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z^7}\,dz = \frac{2\pi i}{6!}.$

3. [6 = 1 + 2 + 2 +1 puntos] Dado $R > 2$, consideremos el contorno $\gamma_R = I_R + C_R$, orientado positivamente y compuesto por el intervalo $I_R = [-R, R]$ del eje real y por la semicircunferencia $C_R = \{z = Re^{it} : 0 \le t \le \pi\}$.

(a) Determine todas las singularidades aisladas de la función $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$ dentro del dominio acotado por γ_R, indicando razonadamente el tipo de cada singularidad.



$z^2+4=(z+2i)(z-2i)$; $R>2 \Rightarrow$ la única singularidad de f en $D_{int}(\gamma_R)$ es $z=2i$ y es un polo simple:

$f(z)=\dfrac{g(z)}{z-2i}$, siendo $g(z)=\dfrac{e^{iz}}{z+2i}$, función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$ que $\supseteq \{\gamma_R\}\cup D_{int}(\gamma_R)$, $g\neq 0$ allí.

(b) Calcule el residuo de f en cada uno de las singularidades encontradas, indicando la fórmula usada.

Fórmula para el residuo en un polo simple:

$$Res(f;2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i} g(z)=\frac{e^{-2}}{4i}.$$

(c) Usando los métodos vistos en clase (tales como las estimaciones para las funciones racionales o el Lema de Jordan), obtenga una acotación tan precisa como sea posible para el valor $\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|$ que permita deducir que $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$.

$z\in C_R \Rightarrow z=Re^{it},\ 0\le t\le\pi \Rightarrow dz=Rie^{it}dt$

$\Rightarrow |dz|=R\,dt$. $\quad |f(z)|=\dfrac{|e^{iz}|}{|z^2+4|}\le\dfrac{|e^{iz}|}{|z|^2-4}=\dfrac{e^{Re\{iz\}}}{|z|^2-4}$.

$iz=iR(\cos t+i\operatorname{sen} t)=-R\operatorname{sen} t+iR\cos t \Rightarrow e^{Re\{iz\}}=e^{-R\operatorname{sen} t}$

$$\Rightarrow \left|\int_{C_R} f(z)dz\right|\le\int_{C_R}|f(z)|\,|dz|\le\frac{R}{R^2-4}\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t}dt < \frac{R}{R^2-4}\cdot\frac{\pi}{R}=\frac{\pi}{R^2-4}$$

(Lema de Jordan, visto en clase y en los apuntes) $\longrightarrow 0,\ R\to+\infty$.

(d) Utilice los resultados obtenidos en los apartados anteriores para evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx.$$

Teorema de los residuos: $2\pi i\,Res(f;2i)=2\pi i\cdot\dfrac{e^{-2}}{4i}=\dfrac{\pi}{2e^2}$ (aptdo. (b))

$=\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx+0$ (aptdo. (c))

$=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4}dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{2e^2}.$

(Obviamente, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4}dx=0$, al ser la función impar.)