Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 3, 29/04/2019

NOMBRE: ____________ APELLIDOS: ____________________

D.N.I. O PASAPORTE: ____________ FIRMA: ____________________

Modelo D

El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

---

1. [2 puntos] (En este problema NO se pide mostrar ningún trabajo. Elija y marque unícamente una respuesta de entre las ofrecidas abajo. No puntuarán respuestas incorrectas, múltiples o en blanco.)
Sea γ la circunferencia unidad orientada negativamente. El valor exacto de la integral compleja

$$\int_\gamma \frac{z^2+2}{z(z-3)}dz$$

es el siguiente:

(A) 0; (B) $2\pi i$; (C) $-\frac{2}{3}$; (D) $-\frac{4\pi i}{3}$; (E) $\frac{4\pi i}{3}$;

(F) $-2\pi i$; (G) $\frac{2}{3}$; (H) $\frac{22\pi i}{3}$; (I) Ninguno de los anteriores.

2. [3 puntos] Compruebe que la función $u(x,y) = 3xy^2 - x^3$ es armónica en el plano y halle su conjugada armónica.

- $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$; $u_x = 3y^2-3x^2$, $u_{xx} = -6x$; $u_y = 6xy$, $u_{yy} = 6x$
$\Rightarrow \Delta u = u_{xx}+u_{yy} = -6x+6x = 0 \Rightarrow u$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

- Conjugada armónica: una función $v \in C^2(\mathbb{R})$ t.q. $f = u+iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Sabemos que tal v
Ecuaciones de (C-R): $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.
existe y es única, salvo un sumando constante, porque $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo.

$-v_x = u_y = 6xy \Rightarrow v_x = -6xy \Rightarrow v = -3x^2y + \varphi(y)$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$.

$v_y = -3x^2 + \varphi'(y) = u_x = 3y^2 - 3x^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow$

$\varphi(y) = y^3 + C$, $C = \text{cte} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v(x,y) = -3x^2y + y^3 + C$.

3. [3 puntos] Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Demuestre que no existe ninguna función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$, indicando todos los teoremas usados.

No existe tal f. Si existiera, se cumpliría lo siguiente:

(1) Por un lado, para $g(z) = z$: $f(z_n) = g(z_n)$, con $z_n = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \in \mathbb{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$; por el Teorema de la unicidad, $f(z) \equiv z$.

(2) Por otra parte, para $h(z) = -z$: $f(w_n) = -w_n = h(w_n)$, donde $w_n = -\frac{1}{n} \in \mathbb{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $w_n \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$; de nuevo, el Tma. de la unicidad $\Rightarrow f(z) = h(z) = -z$.

Luego se seguiría que $z \equiv -z$ en $\mathbb{D}$, lo cual es obviamente falso, $\times\!\!\times$.

4. [2 puntos] Determine razonadamente todas las funciones enteras f (holomorfas en $\mathbb{C}$) tales que

$$|f(z)| \leq \frac{|z|^2}{|z|^2+1}, \qquad \text{para } |z| \geq 2019.$$

$|z| \geq 2019 \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \leq 1$. Por el Teorema de Liouville, $f \equiv cte = C \Rightarrow |C| \leq \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \leq \frac{2019^2}{2019^2+1}$, al ser $u(x) = \frac{x}{x+1}$ una función creciente $x \in [0, +\infty)$: $u'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$.

Recíprocamente, $f \equiv C$, $|C| \leq \frac{2019^2}{2019^2+1}$, entonces $|f(z)| = |C| \leq \frac{2019^2}{2019^2+1} \leq \frac{|z|^2}{|z|^2+1}$ cuando $|z| \geq 2019$.