

Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 3, 29/04/2019

NOMBRE: \_\_\_\_\_ APELLIDOS: \_\_\_\_\_

D.N.I. O PASAPORTE: \_\_\_\_\_ FIRMA: \_\_\_\_\_

Modelo C

El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

1. [2 puntos] (En este problema NO se pide mostrar ningún trabajo. Elija y marque únicamente una respuesta de entre las ofrecidas abajo. No puntuarán respuestas incorrectas, múltiples o en blanco.)  
Sea  $\gamma$  la circunferencia unidad orientada negativamente. El valor exacto de la integral compleja

$$\int_{\gamma} \frac{1 - \cos z}{z^2} dz$$

es el siguiente:

- (A)  $2\pi i$ ;      (B)  $\pi i$ ;      (C)  $0$ ;      (D)  $-2\pi i$ ;      (E)  $-\pi i$ ;  
(F)  $4\pi i$ ;      (G)  $-4\pi i$ ;      (H)  $\frac{\pi i}{2}$ ;      (I) Ninguno de los anteriores.

2. [3 puntos] Encuentre razonadamente todas las funciones  $f$ , analíticas en el disco unidad  $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$  y tales que  $f(z) = f(\frac{z}{2})$ , para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Indique los resultados usados.

Véase el modelo A, problema 2.

3. [2 puntos] Para  $f(z) = |z|$  y  $z \neq 0$ , calcule  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ , simplificando la forma final de la respuesta y expresándola en términos de  $z$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} (f_x + if_y) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}, \quad z \neq 0. \end{aligned}$$

4. [3 puntos] Si  $f$  es entera y cumple

$$|f(z)| \leq e^{-\operatorname{Im} z}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ , demuestre que existe  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = ce^{iz}$  y  $|c| \leq 1$ . Indique los teoremas usados.

Véase el modelo A, problema 4.