Variable Compleja I **(Curso 2018-19)** **Universidad Autónoma de Madrid**

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 3, 29/04/2019

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ____________________ FIRMA: ________________________________

Modelo B

El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

---

1. [2 puntos] [2 puntos] (En este problema NO se pide mostrar ningún trabajo. Elija y marque unícamente una respuesta de entre las ofrecidas abajo. No puntuarán respuestas incorrectas, múltiples o en blanco.) Eligiendo la determinación principal del argumento de manera que $\operatorname{Arg} z \in (-\pi,\pi)$, halle todos los posibles valores de $\log(-i)$.

(A) $\pi i(2n+\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{N}$; (B) $\pi i(2n+\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{Z}$; (C) $\pi i(2n-\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{Z}$;

(D) $\pi i(2n-\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{N}$; (E) $\pi i(n+\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{Z}$; (F) $\pi i(n+\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{N}$;

(G) $\pi i(n-\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{Z}$; (H) $\pi i(2n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$; (I) Ninguno de los anteriores.

2. [3 puntos] Compruebe que la función $u(x,y)=3x^2y-y^3$ es armónica en el plano y halle su conjugada armónica.

• $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$; $u_x=6xy$, $u_{xx}=6y$; $u_y=3x^2-3y^2$; $u_{yy}=-6y$ $\Rightarrow$
$\Delta u = u_{xx}+u_{yy} = 6y-6y=0$ en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ u es armónica.

• Para que una función $v\in C^2(\mathbb{R}^2)$ sea una conjugada armónica de u, debe existir una función $f\in H(\mathbb{C})$ t.q. $f=u+iv$ y, por tanto, $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann); puesto que $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$ es simplemente conexo, existe tal v y es única, salvo un sumando constante.

$u_x=v_y \Rightarrow 6xy=v_y \Rightarrow v=3y^2x+\phi(x)$, $\phi\in C^2(\mathbb{R})$

$u_y=-v_x \Rightarrow v_x=-u_y=3y^2-3x^2=3y^2+\phi'(x) \Rightarrow \phi'(x)=-3x^2$

$\Rightarrow \phi(x)=-x^3+C$, $C=\text{cte}$, $C\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow v(x,y)=3xy^2-x^3+C$.

3. [3 puntos] Encuentre razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$ y que allí satisfagan la condición

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

Observemos que $z_n = \frac{n}{n+1} \in D(1;1)$ ya que $|z_n - 1| = \frac{1}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, $z_n \longrightarrow 1 \in D(1;1)$. Luego, por el Principio de la unicidad $f \equiv g$, donde g es cualquier función t.q. $g \in \mathcal{H}(D(1;1))$ y $g(z_n) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$. Sólo falta hallar tal g.

$\frac{n}{n+1} = z_n \iff n = nz_n + z_n \iff n = \frac{z_n}{1-z_n}$, luego

$$1 - \frac{1}{2n^2+2n+1} = 1 - \frac{1}{2\frac{z_n^2}{(1-z_n)^2} + 2\frac{z_n}{1-z_n} + 1} = \dots = \frac{2z_n}{1+z_n^2}.$$

Así que tomamos $g(z) = \frac{2z}{1+z^2}$; sólo tiene polos en $\pm i$ pero $\pm i \notin D(1;1)$: $|1 \pm i| = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow g \in \mathcal{H}(D(1;1))$.

Conclusión: $f(z) \equiv g(z) = \frac{2z}{1+z^2}$.

4. [2 puntos] Sea f una función entera. Si $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, demuestre que f es constante.

$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \Rightarrow \exists M > 0\ \forall z \in \mathbb{C}\ |z| \geq M \Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$

$\Rightarrow |f(z)| \leq |z|$ cuando $|z| \geq M$. Las estimaciones de Cauchy implican que f es un polinomio de grado $\leq 1 \Rightarrow$

$f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Usando de nuevo la condición $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, obtenemos que

$$0 = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{z} = a + \lim_{z\to\infty} \frac{b}{z} = a + 0 = a \Rightarrow a = 0$$

$\Rightarrow f(z) = b$ (cte).

(Es fácil ver que toda f = cte cumple $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$.)