Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 3, 29/04/2019

NOMBRE: ____________ APELLIDOS: ____________

D.N.I. O PASAPORTE: ____________ FIRMA: ____________

Modelo A

El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

1. [2 puntos] (En este problema NO se pide mostrar ningún trabajo. Elija y marque unícamente una respuesta de entre las ofrecidas abajo. No puntuarán respuestas incorrectas, múltiples o en blanco.) Eligiendo la determinación principal del argumento de manera que $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$, halle todos los posibles valores de $\log i$.

(A) $\pi i(2n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$; (B) $\pi i(2n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$; (C) $\pi i(2n-\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$;

(D) $\pi i(2n-\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$; (E) $\pi i(n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$; (F) $\pi i(n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$;

(G) $\pi i(n-\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$; (H) $\pi i(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$; (I) Ninguno de los anteriores.

2. [3 puntos] Encuentre razonadamente todas las funciones f, analíticas en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y tales que $f(z) = f\left(\frac{z}{2}\right)$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Indique los resultados usados.

SOLUCIÓN 1. $z \in \mathbb{D} \Rightarrow \frac{z}{2} \in \mathbb{D}$. Aplicando la condición $\circledast$ $f(z) = f(\frac{z}{2})$ sucesivamente, obtenemos que $f(z) = f(\frac{z}{2}) = f(\frac{z}{4}) = f(\frac{z}{8}) = f(\frac{z}{16}) = \dots$. Puesto que $\frac{z}{2^n} \to 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ fijo, se sigue por continuidad que $f(z) = f(\frac{z}{2^n}) \to f(0)$, $\forall z \in \mathbb{D}$, luego $f(z) = f(0)$, $\forall z \in \mathbb{D}$ (al ser la sucesión $\{f(\frac{z}{2^n})\}_{n=1}^{\infty}$ constante). También se puede deducir lo mismo por el Teorema de la unicidad (Principio de los ceros aislados). Por tanto, $\circledast \Rightarrow f \equiv cte$ en $\mathbb{D}$. Recíprocamente, toda $f \equiv cte$ cumple $\circledast$.

SOLUCIÓN 2. $f \in H(\mathbb{D}) \Rightarrow f$ se puede desarrollar en serie de Taylor centrada en $z=0$ y convergente en $\mathbb{D}$ $(R \geq 1)$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$.

$\circledast \Rightarrow a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots = a_0 + \frac{a_1}{2} z + \frac{a_2}{4} z^2 + \frac{a_3}{8} z^3 + \frac{a_4}{16} z^4 + \dots$

La unicidad de los coeficientes de Taylor $\Rightarrow a_0 = a_0$, $a_1 = \frac{a_1}{2}$, $a_2 = \frac{a_2}{4}$, $a_3 = \frac{a_3}{8}$, ..., $a_n = \frac{a_n}{2^n}$, ... $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0 \Rightarrow$ $f(z) \equiv a_0 = cte$.

Como ya comentamos, $f \equiv cte \Rightarrow f$ cumple $\circledast$.

3. [2 puntos] Encuentre todas las funciones armónicas de la forma $u(x,y) = g(ax+by)$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2.

• Primero consideremos el caso $(a,b) \neq (0,0)$; entonces $a^2+b^2 \neq 0$.
$u_x = a g'(ax+by)$, $u_{xx} = a^2 g''(ax+by)$, $u_{yy} = b^2 g''(ax+by)$, según la Regla de la Cadena $\Rightarrow 0 = \Delta u = u_{xx}+u_{yy} = (a^2+b^2) g''(ax+by) \Rightarrow g''(ax+by) = 0$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ (puesto que $a^2+b^2 \neq 0$) $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $g''(t) = 0 \Rightarrow g(t) = \alpha t + \beta$ (función lineal) $\Rightarrow g(ax+by) = \alpha(ax+by)+\beta = Ax+By+C$, donde $A = \alpha a$, $B = \alpha b$, $C = \beta \in \mathbb{R}$.

Toda función de la forma $u(x,y) = Ax+By+C$ es armónica:
$u_x = A$, $u_{xx} = 0$, $u_y = B$, $u_{yy} = 0 \Rightarrow \Delta u \equiv 0$.

• El caso $a=b=0$ está incluido en el caso anterior:
$u(x,y) = g(0\cdot x + 0\cdot y) = g(0) \equiv cte$ $(A=B=0)$.

4. [3 puntos] Si f es entera y cumple

$$|f(z)| \le e^{-\operatorname{Im} z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, demuestre que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = ae^{iz}$ y $|a| \le 1$.

$e^{-\operatorname{Im} z} = e^{-y} = |e^{-y+xi}| = |e^{i(x+yi)}| = |e^{iz}|$, para $z = x+yi$.
Por tanto, f cumple $|f(z)| \le |e^{iz}|$. Puesto que la función $g(z) = e^{iz}$ es entera y $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, se sigue que

$\left|\frac{f(z)}{e^{iz}}\right| \le 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ y $\frac{f(z)}{e^{iz}}$ también es entera.

Por el Teorema de Liouville, $\frac{f(z)}{e^{iz}} \equiv a = cte \Rightarrow$

$f(z) = ae^{iz}$.

Además, $|a| = \left|\frac{f(z)}{e^{iz}}\right| \le 1$.