Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 2, 14/03/2019

NOMBRE: ____________ APELLIDOS: ____________

D.N.I. O PASAPORTE: ____________ FIRMA: ____________

Modelo D

El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

---

1. [5 puntos] ¿Para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ convergen las siguientes series de potencias?

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, **b)** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$, $a>0$.

a) $a_k = \begin{cases} 1, & k=n! \\ 0, & k\neq n! \end{cases}$; lo mismo para $\sqrt[k]{|a_k|}$. Luego

(salvo $a_1=2$) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \dfrac{1}{1} = 1$

La serie converge para $|z|<1$.

Para $|z|=1$, $|z^{n!}| = 1 \not\to 0$, $n\to\infty$ $\Rightarrow$ la serie diverge.

b) $a_n = n + a^n$, $a>0$ $\Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+1+a^{n+1}}{n+a^n} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \begin{cases} \dfrac{a^{n+1}}{a^n} = a, & a>1 \\ \dfrac{n+1}{n} \to 1, & a\leq 1 \end{cases} = \max\{1,a\}$.

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \dfrac{1}{\max\{a,1\}} = \min\{1, \frac{1}{a}\}$.

Hemos usado el hecho de que

$a^n \to 0$, $n\to\infty$

y

$a^n \to +\infty$, más rápido que n, cuando $n\to\infty$.

2. [5 puntos]

c) Decida razonadamente si la siguiente sucesión tienen límite (finito o infinito):

$$z_n = n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} + i \frac{\operatorname{sen} n}{n}.$$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1,\ x \to 0^+$; $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1,\ n \to \infty$

$\Rightarrow |z_n| \geq \operatorname{Re}\{z_n\} = n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} = n^{3/2} \cdot \sqrt{n} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \to +\infty,\ n \to \infty.$

Luego $z_n \to \infty,\ n \to \infty.$

d) ¿Dónde es derivable la función $f(z) = |z|$?

$f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = u + iv \Rightarrow u = \sqrt{x^2+y^2},\ v \equiv 0.$

Para $z \neq 0$; Cauchy-Riemann $\Rightarrow$ $u_x = v_y \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

$u_y = -v_x \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0),\ \#$ (con $z \neq 0$).

f no es derivable en ningún $z \neq 0$.

¿$\exists f'(0)$? $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} \not\to$, cuando $h \to 0$:

$h = re^{it}$: $\frac{|h|}{h} = \frac{r}{re^{it}} = e^{-it}$, toma distintos valores para los diferentes $t \Rightarrow \nexists \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$.

$\therefore$ No existe $f'(z)$ para ningún $z \in \mathbb{C}$.