Variable Compleja I (Curso 2018-19) **Universidad Autónoma de Madrid**

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 2, 14/03/2019

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ________________________________

D.N.I. O PASAPORTE: ____________________ FIRMA: ________________________________

Modelo C

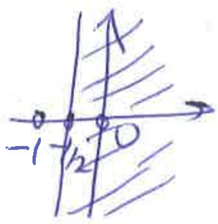
El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

---

1. [5 puntos] ¿Para qué valores de z convergen las siguientes series?

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz}$.

(a) Sabemos de clase que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ converge $\iff |w|<1$. Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ converge $\iff \left|\frac{z}{1+z}\right|<1 \iff |z|<|1+z| \iff \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$.



Geométricamente: $|z|<|1+z| \iff dist(z,0)<dist(z,-1)$

Algebraicamente: $|z|<|1+z| \iff |z|^2<|1+z|^2=1+|z|^2+2\operatorname{Re} z$

$\iff \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$.

(b) La serie converge para $x=\operatorname{Re} z>0$ porque entonces $|ne^{-nz}|=|ne^{-n(x+yi)}|=ne^{-nx}$ y la serie $\sum_n ne^{-nx}=\sum_n \frac{n}{(e^x)^n}$ converge porque converge $\sum_n nr^n$ para $0<r<1$ $(r=\frac{1}{e^x})$.
(Hemos usado el Test de Weierstrass.)

La serie diverge para $x=\operatorname{Re} z\le 0$ porque entonces su término general es $|ne^{-nz}|=ne^{-nx}\ge n \not\to 0,\ n\to\infty$.

Por tanto, la serie dada converge (de hecho, absolutamente) para los z t.q. $\operatorname{Re} z>0$.

2. [5 puntos]

c) Si $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ¿qué representa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-a_n)z^n$ en términos de f?

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-a_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$= f'(z) - f(z).$$

(Aquí hemos usado la formula para la derivada de una serie de potencias.)

d) ¿Dónde es derivable la función $f(z)=e^{-x}\cos y + i e^{-x}\operatorname{sen} y$?

$$f(z)=(u+iV)(z) \Rightarrow \begin{array}{l} u(z)=e^{-x}\cos y \\ V(z)=e^{-x}\operatorname{sen} y, \end{array}$$

Si $\exists f'(z)$, se cumplen en z las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = V_y \Rightarrow -e^{-x}\cos y = e^{-x}\cos y \xRightarrow{(e^{-x}>0)} -\cos y = \cos y$$

$$\Rightarrow \cos y = 0.$$

$$u_y = -V_x \Rightarrow -e^{-x}\operatorname{sen} y = +e^{-x}\operatorname{sen} y \Rightarrow \operatorname{sen} y = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 0 \quad (\text{y debería ser } =1),$$

$$\#$$

$f'(z)$ no existe en ningún $z\in\mathbb{C}$.