Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 2, 14/03/2019

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ____________________ FIRMA: ________________________________

Modelo B

El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

---

1. [5 puntos] Halle los puntos de continuidad de la siguiente función:

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \le 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

• En el conjunto abierto $U=\{z : |z|<1\}$, f es continua porque $\forall z_0 \in U$, f viene dada por la misma fórmula: $f(z)=z$ en un entorno de z_0 y ya sabemos que la identidad es continua.

• En el conjunto abierto $V=\{z : |z|>1\}$, f también es continua porque $\forall z_0 \in V$, en un entorno abierto de z_0 f viene dada por la fórmula $f(z)=|z|^2$ (y esta función es continua por ser la composición de la función módulo: $z \mapsto |z|$ y la función $z \mapsto z^2$, que son continuas).

• Queda el conjunto $\mathbb{T}=\{z : |z|=1\}$. En $z=1$ la función f es continua porque si $z_n \in \overline{U}$ y $z_n \to 1$, $n\to\infty$, entonces $f(z_n)=z_n \to 1$ y si $z_n \in V$ y $z_n \to 1$, entonces $f(z_n)=|z_n|^2 \to 1$.

Sin embargo, si $|z|=1$ y $z_0 \neq 1$, entonces f no es continua en z_0: si $z_0 = e^{it_0}$, $0<t_0<2\pi$. A saber, $z_n=(1-\frac{1}{n})z_0=(1-\frac{1}{n})e^{it_0} \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to e^{it_0}=z_0$, $n\to\infty$, pero si $w_n=(1+\frac{1}{n})e^{it_0}=(1+\frac{1}{n})z_0 \to z_0$ pero $f(w_n)=|w_n|^2=(1+\frac{1}{n})^2 \to 1 \neq z_0$.

2. [5 puntos]

a) Sea $a > 0$. ¿Para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ converge la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^a}{n!} z^n$?

$$a_n = \frac{n^a}{n!} \underset{(a>0)}{\Rightarrow} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^a}{(n+1)!}}{\frac{n^a}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a/(n+1) \longrightarrow 0, \quad n\to\infty$$

p.q. $\frac{n+1}{n} \to 1$, $n+1 \to +\infty$.

Por tanto, el radio de convergencia es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

La serie dada converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

b) ¿Dónde es holomorfa la función $f(x+yi) = e^x(y - iy^2)$?

$$f(x+yi) = e^x y - ie^x y^2 = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\Rightarrow u = \operatorname{Re} f = e^x y; \quad v = \operatorname{Im} f = -e^x y^2.$$

Si es holomorfa en un punto $z = x+yi$, entonces allí satisface las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$\Rightarrow u_x = e^x y = v_y = e^x \cdot (-2y) \Rightarrow y = -2y$ (ya que $e^x > 0, \forall x$)

$\Rightarrow y = 0$

$u_y = -v_x \Rightarrow e^x = e^x y^2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y \in \{-1, 1\}$, #

No existe ningún punto $x+yi$ donde f sea derivable.