Variable Compleja I (Curso 2018-19) Universidad Autónoma de Madrid

(4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Examen parcial 2, 14/03/2019

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ________________________________

D.N.I. O PASAPORTE: ____________________ FIRMA: ____________________________

Modelo A

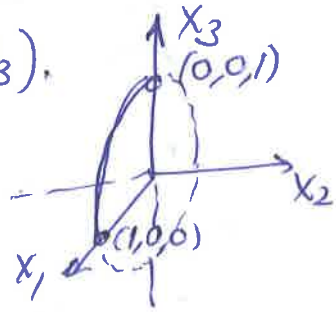
El examen es de desarrollo: se pide razonar las soluciones. Puntuación máxima: 10 puntos

1. [5 puntos] Sea P^{-1} la transformación inversa de la proyección estereográfica. Halle las imágenes por P^{-1} (en la esfera de Riemann) de los conjuntos definidos por las siguientes desigualdades:

a) $\operatorname{Im} z = 0$, **b)** $|z| < 1$.

(a) Queremos describir el conjunto de los puntos $X = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ tales que $\operatorname{Im} z = 0$, donde $z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$; es decir, $\frac{x_2}{1-x_3} = 0$.

Esto es $\Leftrightarrow x_2 = 0$ (salvo que $x_3 = 1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0,1) = N$), teniendo en cuenta que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Se trata de la circunferencia $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1, x_2 = 0\}$, que es la intersección de la esfera con el plano vertical $x_2 = 0$ (plano $x_1 x_3$).



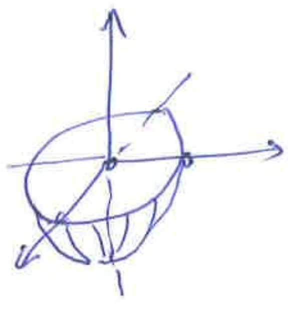
(b) En este caso, tenemos la condición

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1 - x_3^2}{(1-x_3)^2} < 1$$

(puesto que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$) $\Leftrightarrow \frac{1 + x_3}{1 - x_3} < 1 \Leftrightarrow 1 + x_3 < 1 - x_3 \Leftrightarrow x_3 < 0$.

Se trata del "hemisferio sur":

$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 < 0\}$.



2. [5 puntos]

c) Sea $a>0$. ¿Para qué valores de $z\in\mathbb{C}$ converge la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{z^n}{a^n}$?

$$a_n=\frac{n!}{a^n}\ ; \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{a^n}} \overset{(a>0)}{=} \frac{n+1}{a} \to +\infty,\ n\to\infty$$

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{+\infty}=0.$$ (radio de convergencia)

La serie sólo converge para $z=0$.

d) Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y g una función holomorfa en Ω. ¿Dónde es holomorfa la función dada por la fórmula $f(z)=\overline{g(z)}$?

f es derivable en el punto $z=a$ si y sólo si existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{g(a+h)-g(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\overline{\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)}\cdot\frac{\bar h}{h}.$$

Este límite existe si $g'(a)=0$ p.q. el primer factor $\to \overline{g'(a)}$ y el segundo está acotado: $\left|\frac{\bar h}{h}\right|=1$.

Si $g'(a)\neq 0$, entonces el primer factor aún $\to\overline{g'(a)}$ pero el segundo "oscila" porque su argumento puede ser arbitrario:

$h=re^{it} \Rightarrow \frac{\bar h}{h}=\frac{re^{-it}}{re^{it}}=e^{-2it}$, no converge cuando $r\to 0$.

Por tanto, $\overline{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}\cdot\frac{\bar h}{h}$ no converge cuando $h\to 0$.

Conclusión: $\exists f'(a) \Leftrightarrow g'(a)=0$.