Variable Compleja I **3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

EXAMEN PARCIAL, MARZO DE 2016

SOLUCIONES

1. [3 **puntos**] Calcule razonadamente el radio de convergencia de la serie de potencias
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} z^n .$$

SOLUCIÓN. En este caso, debido a la presencia de los factoriales, es conveniente aplicar la fórmula
$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$
No es díficil ver que el límite efectivamente existe: en este caso, $a_n = \dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$ así que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\frac{n^{2n}}{(2n)!}} = \frac{\frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2}{(2n+2)!}}{\frac{n^{2n}}{(2n)!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \to \frac{e^2}{4}$$
cuando $n\to\infty$, con lo cual $R = 4/e^2$. ■

2. [2 **puntos**] Sea $|z| < 1$. Calcule razonadamente la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

SOLUCIÓN. Sabemos que la serie geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge en el disco unidad $\{z : |z| < 1\}$ y que su suma allí es $\dfrac{1}{1-z}$. También sabemos que las series de potencias se pueden derivar término por término en su disco de convergencia. Así obtenemos
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} .$$
Finalmente, multiplicando ambos lados por z, obtenemos que $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$.

(Comentario. Esta función, denominada la *función de Koebe*, es muy relevante en la teoría geométrica de funciones y se estudiará en algún curso posterior relacionado con la variable compleja. Puede verse, por ejemplo, que es univalente (inyectiva y holomorfa) y que transforma el disco unidad en el plano menos un corte en forma de semirrecta desde el punto $-\dfrac{1}{4}$ hasta el infinito.) ■

3. [2 **puntos**] Determine el lugar geométrico de los puntos z en el plano tales que $|z| = 2|z-i|$.

SOLUCIÓN.

La condición $|z| = 2|z-i|$ es equivalente a $|z|^2 = 4|z-i|^2$ que, escrita en coordenadas euclídeas (siendo $z = x + yi$), se transforma en

$$x^2 + y^2 = 4\left(x^2 + (y-1)^2\right),$$

es decir,

$$0 = 3x^2 + 3y^2 - 8y + 4,$$

lo cual es evidentemente la ecuación de una circunferencia. Para determinar su centro y radio, dividimos entre 3 y completamos el cuadrado con los términos que contienen a la variable y:

$$0 = x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 + \frac{4}{3} - \frac{16}{9},$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 = \frac{4}{9},$$

así que se trata de la circunferencia de centro $\frac{4}{3}i$ y radio $\frac{2}{3}$. ∎

4. [3 **puntos**] Consideremos las siguientes curvas:

γ: el arco de la circunferencia unidad (orientada en el sentido anti-horario) desde el punto $e^{-\frac{3\pi i}{4}}$ hasta el punto i,

I: el segmento $[i, 2i]$,

Γ: la semicircunferencia centrada en el origen y de radio 2, desde $2i$ hasta $-2i$ (también vista como parte de la circunferencia con orientación positiva).

(a) Calcule razonadamente (por definición o de otra forma) el valor de la integral $\int \frac{1}{z}\,dz$ sobre la unión de las curvas γ, I y Γ.

(b) Sea C la curva cerrada que se obtiene añadiendo a la unión de γ, I y Γ el segmento desde $-2i$ hasta el punto $e^{-\frac{3\pi i}{4}}$. Calcule $\int_C \frac{1}{z}\,dz$.

(a)

SOLUCIÓN 1 :

Parametrizamos γ como sigue:

$$z = e^{it}, \quad -\frac{3\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}, \qquad dz = ie^{it}\,dt.$$

Es muy sencillo parametrizar I:

$$z = iy, \quad 1 \le y \le 2, \qquad dz = i\,dy.$$

Parametrizamos Γ como sigue:

$$z = 2e^{it}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}, \qquad dz = 2ie^{it}\,dt.$$

Ahora calculamos las integrales por definición:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\cup I\cup\Gamma} \frac{1}{z}\,dz &= \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz + \int_I \frac{1}{z}\,dz + \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz \\
&= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt + \int_1^2 \frac{1}{iy} i\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2e^{it}} 2ie^{it}\,dt \\
&= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} i\,dt + \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2i\,dt \\
&= \frac{9\pi i}{4} + \ln 2.
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2:

Denotemos por $\arg_\alpha(z)$ el argumento de z en el intervalo $(\alpha - 2\pi, \alpha)$.

Como $f_1(z) = \log|z| + i\arg_\pi(z)$ es rama del logaritmo en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \le 0\}$, tenemos que

$$\int_{\gamma\cup I} \frac{1}{z}\,dz = f_1(2i) - f_1(e^{-\frac{3\pi i}{4}}) = \log|2i| + i\frac{\pi}{2} - \left[\log|e^{-\frac{3\pi i}{4}}| - i\frac{3\pi}{4}\right] = \log 2 + i\frac{5\pi}{4}$$

Como $f_2(z) = \log|z| + i\arg_{2\pi}(z)$ es rama del logaritmo en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \ge 0\}$, tenemos que

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = f_2(-2i) - f_2(2i) = \log|-2i| + i\frac{3\pi}{2} - \left[\log|2i| + i\frac{\pi}{2}\right] = i\pi$$

Sumando obtenemos el resultado

$$\int_{\gamma\cup I\cup\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\gamma\cup I} \frac{1}{z}\,dz + \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = \log 2 + i\frac{9\pi}{4}$$

(b) Teniendo en cuenta que C es una curva C^1 a trozos, simple y cerrada y con orientación positiva, la Fórmula Integral de Cauchy nos dice que

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

■