Variable Compleja I $\quad$ 3^{o} **de Matemáticas /** 4^{o} **de Doble Titulación**

EXAMEN FINAL, CONVOCATORIA DE MAYO DE 2016

SOLUCIONES

1. Determine razonadamente todas las funciones enteras f tales que $|f(z)| \le |ze^z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

SOLUCIÓN. El problema se puede abordar de varias formas, siempre recurriendo a las propiedades de funciones enteras y justificando que las funciones consideradas lo son.

Solución 1. Recordemos que la función exponencial es entera y no se anula. Por tanto, la función $g(z) = f(z)/e^z$ es también entera. Además, satisface la desigualdad $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Las *estimaciones de Cauchy* implican que g es un polinomio de grado, como mucho, uno: $g(z) = az + b$, luego $f(z) = (az + b)e^z$.

Veamos ahora cuáles de estas funciones cumplen la hipótesis $|f(z)| \le |ze^z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Primero, sustituyendo $z = 0$, obtenemos que $|f(0)| \le 0$, luego $f(0) = 0$ y esto implica que $b = 0$. Por consiguiente, $f(z) = aze^z$ y, además, $|aze^z| \le |ze^z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Tomando cualquier $z \neq 0$, se sigue que $|a| \le 1$. Finalmente, $f(z) = aze^z$, $|a| \le 1$.

Es inmediato que toda función de este tipo cumple la condición $|f(z)| \le |ze^z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución 2. Sustituyendo $z = 0$ en la desigualdad $|f(z)| \le |ze^z|$, concluimos que $f(0) = 0$ como en la solución anterior. Por tanto, $f(z) = zh(z)$, donde h es holomorfa en el plano (entera). Con esta información adicional, se deduce que $|zh(z)| \le |ze^z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, así que $|h(z)| \le |e^z|$ para todo $z \neq 0$. Si definimos la función F mediante la fórmula

$$F(z) = \frac{f(z)}{ze^z} = \frac{h(z)}{e^z}, \qquad z \neq 0,$$

ésta tiene una singularidad aislada en $z = 0$. El hecho de que la exponencial no se anula y la desigualdad obtenida arriba: $|h(z)| \le |e^z|$ para todo $z \neq 0$, nos dicen que $|F(z)| \le 1$ para todo $z \neq 0$. Por el *teorema de Riemann*, la singularidad aislada de F en $z = 0$ es evitable. Por tanto, podemos extender F para que sea holomorfa en $z = 0$. Por continuidad, la extensión también está acotada por uno en módulo en el origen, así que es una función entera y acotada. Por el *teorema de Liouville*, $F \equiv a$ para cierta constante $a \in \mathbb{C}$. Luego $f(z) = aze^z$ y $|a| \le 1$ ya que $|F| \le 1$. ■

2. (a) Decida razonadamente si es cierto o falso que $|\operatorname{sen} z| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\operatorname{sen} z = e^2 z^3$ en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$? Justifique la respuesta.

SOLUCIÓN. (a) Este apartado admite varias soluciones. Aquí recogemos dos de ellas.

Solución 1. Puesto que la función seno es entera, si estuviera acotada por uno (en módulo) en todo el plano, por el *teorema de Liouville* sería constante, lo cual es absurdo.

Solución 2. Alternativamente, podemos razonar directamente, eligiendo $z = -i$:

$$|\operatorname{sen}(-i)| = \left|\frac{e - e^{-1}}{2i}\right| = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e} > 1\,.$$

La última desigualdad se comprueba fácilmente: es equivalente a

$$e^2 - 1 > 2e \Longleftrightarrow e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2 > 2\,,$$

lo cual es cierto ya que $e - 1 = 2{,}7\ldots - 1 > \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2} = 1{,}4\ldots$.

(b) En virtud del apartado (a), no podemos acotar la función seno por uno en la circunferencia unidad, así que hay que proceder con esimaciones más delicadas. Sean

$$f(z) = e^2 z^3\,, \qquad g(z) = \operatorname{sen} z\,.$$

Son, obviamente, dos funciones enteras. Escribiendo $z = x + yi$, vemos que

$$e^{iz} = e^{-y+ix}\,, \qquad e^{-iz} = e^{y-ix}\,.$$

Cuando $|z| = 1$, es obvio que $|y| < 1$ así que

$$|e^{iz}| = |e^{-y+ix}| = e^{-y} < e\,, \qquad |e^{-iz}| = |e^{y-ix}| = e^{y} < e\,.$$

Por la desigualdad triangular, de aquí se sigue que

$$|\operatorname{sen} z| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right| \le \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} < \frac{e + e}{2} = e < e^2 = e^2|z|^3\,.$$

Por el *teorema de Rouché* se sigue que en el disco unidad las funciones $f(z) = e^2 z^3$ y $f(z) - g(z) = e^2 z^3 - \operatorname{sen} z$ tienen el mismo número de ceros, que es 3, ya que f tiene un cero triple en el origen. Por tanto, nuestra ecuación $\operatorname{sen} z = e^2 z^3$ tiene tres ceros en el disco unidad. ■

3. (a) Desarrolle en serie de Laurent en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la siguiente función

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}}\,, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

(Sugerencia: Binomio de Newton.)

(b) Calcule $\operatorname{Res}(f; 0)$.

(c) Usando métodos de variable compleja, demuestre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}\theta)^{2n}\,d\theta = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

SOLUCIÓN. (a) Comenzamos desarrollando la función $(z^2-1)^{2n}$ según la *fórmula del binomio de Newton*:

$$(z^2-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{2n-k}(z^2)^k = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k z^{2k}.$$

(Obsérvese que $(-1)^{2n-k} = (-1)^k$ ya que $(-1)^{2n-2k} = 1$.) De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k z^{2k-2n-1} \\ &= \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{2n}{z^{2n-1}} + \frac{\binom{2n}{2}}{z^{2n-3}} + \ldots + (-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{z} + (-1)^{n+1}\binom{2n}{n+1}z + \ldots + z^{2n-1}. \end{aligned}$$

y ésta es la serie de Laurent de la función f alrededor del origen.

(b) Del resultado del apartado (a) se desprende que $\operatorname{Res}(f;0) = (-1)^n\binom{2n}{n}$ ya que es igual al coeficiente de la serie de Laurent al lado de $1/z$.

(c) Como en varios problemas vistos en clase y en hojas de problemas resueltos, parametrizamos la circunfencia unidad, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y hacemos el cambio de variable de forma habitual:

$$z = e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

En la circunfencia unidad (y sólo allí) la función seno se puede expresar como sigue:

$$z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}\theta \implies \operatorname{sen}\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $i^{2n} = (-1)^n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}\theta)^{2n}\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{(z^2-1)^{2n}}{(2iz)^{2n}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2^{2n}(-1)^n}\int_{\mathbb{T}}\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz \\ &= \frac{1}{2^{2n}(-1)^n}\operatorname{Res}(f;0) = \frac{1}{2^{2n}(-1)^n}(-1)^n\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

4. Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \text{ y } \operatorname{Re} z < 0\}$ sobre el primer cuadrante $Q = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \text{ y } \operatorname{Re} z > 0\}$. Justifique los pasos intermedios.

SOLUCIÓN. Nuestro dominio Ω es una semibanda abierta contenida en el semiplano izquierdo. Por tanto, ambos dominios son simplemente conexos y distintos del plano $\mathbb{C}$ y la existencia de una aplicación con las propiedades deseadas está garantizada por el *teorema de la aplicación conforme de Riemann.* Puesto que no hemos especificado las imágenes de ningún punto, existirán infinitas aplicaciones con estas características.

Una manera de conseguir una aplicación deseada es la siguiente. La función exponencial: $f(z) = e^z$, transforma la semibanda Ω en el semidisco unidad derecho: $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$. Esto se puede ver de la siguiente manera: si $z = x + yi \in \Omega$ entonces $x < 0$, $-\pi/2 < y < \pi/2$. Por lo tanto,

$$|f(z)| = |e^{x+yi}| = e^x < 1\,, \qquad \arg f(z) = \arg e^{x+yi} = y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

y la exponencial es inyectiva en la semibanda (porque su anchura es inferior a 2π), como ya hemos comentado en clase y en problemas resueltos. Es inmediato que la aplicación es sobreyectiva.

Sólo nos queda un paso: llevar el semidisco S al primer cuadrante, Q. Esto se puede hacer de forma directa, mediante una transformación lineal fraccionaria (o de Möbius), por ejemplo, buscando una con las siguientes propiedades:

$$T(-i) = 0\,, \quad T(i) = \infty\,, \quad T(1) = 1\,.$$

La única transformación con estas propiedades es

$$T(w) = (-i)\frac{w+i}{w-i} = i\frac{i+w}{i-w}\,.$$

Para encontrarla, podemos usar razón doble o buscar el valor de K en la expresión (obvia) que debe tener T:

$$T(w) = K\frac{w+i}{w-i}\,,$$

usando que $T(1) = 1$.

Las dos piezas que componen el borde de S, la semicircunferencia derecha y el intervalo desde i hasta $-i$ del eje imaginario, son perpendiculares en su punto común $-i$. Al ser T una *aplicación conforme*, las transforma en dos curvas perpendiculares en $T(-i) = 0$. Por tanto, ambas son semirrectas con punto inicial en el origen ya que el punto i es común a ambas y $T(i) = \infty$. Finalmente, podemos considerar la orientación de las fronteras o, alternativamente, calcular $T(1/2)$ para ver que $T(S) = Q$.

En resumen, una aplicación con las propiedades deseadas viene dada por la fórmula

$$g(z) = T(f(z)) = i\frac{i+e^z}{i-e^z}\,. \qquad \blacksquare$$