Variable Compleja I ($3^{\underline{o}}$ de Matemáticas y $4^{\underline{o}}$ de Doble Titulación)

Ejemplos y problemas resueltos de análisis complejo (2014-15)

Teoremas de Cauchy

En estos apuntes, la palabra <u>dominio</u> significa, como es habitual, un conjunto abierto y conexo en el plano (y que, por tanto, es conexo por líneas poligonales). Las letras más habituales para denotar un dominio son Ω y D. Un ejemplo frecuente de un dominio es el disco abierto de centro c y radio r: $D(c,r) = \{z : |z-c| < r\}$.

Para simplificar el lenguaje, la palabra <u>contorno</u> (o <u>camino</u>) significará una curva simple (sin autointersecciones) y cerrada, C^1 a trozos. Según el teorema de Jordan, si γ es un contorno, entonces $\mathbb{C} \setminus \gamma$ es un conjunto con dos componentes conexas: un dominio acotado y otro dominio no acotado. El dominio acotado por γ se denomina el <u>dominio interior</u>. Para poder enunciar y utilizar los teoremas de Cauchy que nos interesan en esta sección, consideraremos típicamente un contorno γ que, junto con su dominio interior, está contenido en un dominio Ω donde cierta función f es holomorfa (analítica).

Recordemos que una función f es <u>holomorfa</u> en un dominio Ω si tiene derivada $f'(z)$ en todos los puntos z de Ω. Una función se denomina <u>analítica</u> en Ω si en cada disco $D(c,r)$ contenido en Ω se puede escribir como serie de potencias: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$. Sabemos de clase que una serie de potencias se puede derivar tantas veces cuantas se quiera obteniendo otra serie de potencias convergente en el mismo disco. Por lo tanto, la propiedad de ser analítica es aparentemente mucho más fuerte que la propiedad de ser holomorfa. No obstante, hemos demostrado en clase (y éste es uno de los puntos centrales de este curso) que toda función holomorfa en Ω es, de hecho, analítica en Ω. Por lo tanto, los dos conceptos, analítica y holomorfa, son equivalentes y usaremos ambos términos indistintamente.

Observación. Para seguir estos apuntes, no es necesario ningún conocimiento de las singularidades aisladas ni del teorema de los residuos.

Teorema (integral) de Cauchy. *Sea f una función analítica en un dominio Ω en el plano que contiene a un contorno γ, junto con su dominio interior. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

Ejemplo 1 *Si γ es el rectángulo con los vértices 0, 4, $4+i$, i, entonces $\int_\gamma e^{-3z^2+12}dz = 0$. Esto se puede justificar como sigue. Podemos tomar $\Omega = \mathbb{C}$ ya que la función $f(z) = e^{-3z^2+12}$ es analítica en todo el plano; obviamente, tanto γ como su dominio interior están contenidos en Ω.*

Obsérvese que normalmente tenemos la flexibilidad de reducir el dominio Ω si nos conviene; lo importante es que el contorno γ (junto con su dominio interior $\Omega_i(\gamma)$) esté contenido en él. En el ejemplo anterior, nos hubiera valido en lugar de $\Omega = \mathbb{C}$ tomar como Ω el disco $D(0,6)$ o un rectángulo abierto que contuviese al rectángulo indicado.

Problema 1 *Sea $\gamma = C(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$ con cualquier orientación. Calcule $\int_\gamma g(z)\,dz$, donde $g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$.*

Solución. Obsérvese que g ya no es analítica en todo el plano porque el denominador se anula en los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. (Es un ejercicio sencillo pero instructivo demostrar que ésos son los únicos ceros en todo el plano, usando la definición de la función seno a través de la función exponencial.)

Escojamos, por tanto, un dominio reducido, por ejemplo $\Omega = D(2; 10/9) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 10/9\}$. Este disco no contiene ninguno de los puntos z_n (por tanto, g es holomorfa en Ω) y sí contiene a la curva γ y a su interior. Por tanto, se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy, lo cual nos permite concluir que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\, dz = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Cuando el integrando no es necesariamente holomorfo pero es una fracción sencilla, con frecuencia es útil el siguiente importante resultado.

Fórmula integral de Cauchy. *Sea Ω un dominio y γ un camino contenido dentro de Ω, junto con su dominio interior. Sea f una función de la forma*

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a}\,,$$

donde g es analítica en Ω y a es un punto en el interior del contorno γ. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a} dz = g(a)\,, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Ejemplo 2 *Sea γ la circunferencia unidad con la orientación positiva. Entonces*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz = 2\pi i \cdot \cos 0 = 2\pi i\,,$$

considerando $\Omega = \mathbb{C}$ y $f(z) = \frac{\cos z}{z}$; es decir, $g(z) = \cos z$, una función analítica en todo el plano (entera). La conclusión se sigue aplicando directamente la fórmula integral de Cauchy.

Considerando la misma circunferencia, pero con la orientación negativa (denotada γ^-), obtendríamos

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos z}{z}\, dz = -\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz = -2\pi i\,.$$

Problema 2 *Para la misma circunferencia γ que en el ejemplo anterior y con orientación positiva, calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2 - 2z}\, dz\,.$$

Solución. Eligiendo esta vez $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 2\}$ y $g(z) = \frac{\cos z}{z-2}$, analítica en Ω

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-2z}\, dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z}\, dz = 2\pi i g(0) = 2\pi i \cdot (-\frac{1}{2}) = -\pi i\,.$$

Obsérvese que tanto el camino γ como su dominio interior están contenidos en Ω ya que el punto problemático $z = 2$ no pertenece ni a γ ni a su interior. $\blacksquare$

Problema 3 *Evalúe la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{2\,dz}{4z^2 - 1}\,,$$

donde γ *es la circunferencia unidad* $\{z:\ |z| = 1\}$ *con la orientación positiva.*

Solución. Un método posible consiste en descomponer la función f en fracciones simples y aplicar a cada una de ellas la fórmula integral de Cauchy. (Otro método de resolución de este problema es posible, usando el teorema de los residuos que se considerará más tarde.) Empezamos escribiendo

$$f(z) = \frac{2}{(2z-1)(2z+1)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{2z+1}\,.$$

De aquí se obtiene

$$2 = (2z+1)A + (2z-1)B = (2A + 2B)z + (A - B)\,.$$

Por tanto, tenemos

$$A + B = 0\,, \qquad A - B = 2\,.$$

Resolviendo este sistema lineal trivial, obtenemos que $A = 1$, $B = -1$ y, por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2z+1}\,,$$

lo cual nos será más cómodo escribir como

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z - 1/2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z + 1/2}$$

para poder aplicar la fórmula integral de Cauchy. Recordemos que se necesita una función de la forma $z - a$ en el denominador. Observando que tanto el punto $z = 1/2$ como $z = -1/2$ se encuentran en el interior de γ, ya podemos calcular directamente:

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z - 1/2}\,dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z + 1/2}\,dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,,$$

donde en ambas integrales se ha aplicado la fórmula integral de Cauchy a la función constante $g = 1$ en el numerador. ■

Problema 4 *Siendo* γ *la circunferencia unidad con la orientación positiva, calcule la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz\,.$$

Solución. No podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy a la función $f(z) = \cos z/z$ en $\Omega = \{z:\ z \neq 0\}$ con $a = 0$: ese punto pertenece al interior de γ pero el interior de γ no está contenido en Ω. Sin embargo, podemos usar la fórmula integral de Cauchy para la derivada de la función $g(z) = \cos z$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z^2} = g'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0\,,$$

siendo $n = 1$ y $a = 0$ en la fórmula para la derivada n-ésima en la fórmula integral de Cauchy. ■

Teorema de Liouville

Teorema de Liouville. *Toda función entera y acotada en el plano es constante.*

Comentario: de hecho, es suficiente pedir que esté acotada en un entorno del infinito: $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ ya que la función continua $|f|$ está siempre acotada en el disco compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.

Problema 5 *Sea f una función entera tal que*

$$|f(z)| < |e^z| \qquad \textit{para todo} \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Demuéstrese que entonces $f \equiv \lambda e^z$, donde λ es una constante tal que $|\lambda| < 1$.

Solución. Puesto que $e^z \neq 0$ en $\mathbb{C}$, podemos definir la función $g(z) = f(z)/e^z$. Esta función es entera y satisface la condición $|g(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, $g \equiv cte = \lambda$; es decir, $f(z) = \lambda e^z$. Por la desigualdad impuesta, se sigue fácilmente que $|\lambda| < 1$. ∎

Problema 6 *Pruebe que una función entera f satisface*

$$f(z+1) = f(z)\,, \quad f(z+i) = f(z) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}$$

si y sólo si f es una función constante.

Solución. Es fácil probar por inducción que

$$f(z+m) = f(z)\,, \quad f(z+in) = f(z)$$

para todo m, $n \in \mathbb{N}$. Luego, poniendo $z - m$ y $z - in$ respectivamente en vez de z, vemos que las mismas ecuaciones se cumplen para todo m, $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera vemos que los valores que toma f en el plano son los que toma en un cuadrado cualquiera de lado uno, por ejemplo, en

$$Q = \{z = x + yi :\ 0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq 1\}\,.$$

Puesto que el conjunto Q es compacto y f es continua ahí, su módulo alcanzará su máximo en Q. Por tanto, existe una constante positiva y finita M tal que

$$|f(z)| \leq M\,, \quad \text{para todo } z \in Q\,.$$

Debido a la periodicidad de f observada arriba, se sigue que

$$|f(z)| \leq M\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Por tanto, f es entera y está acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, $f \equiv cte$.

En la dirección recíproca, es obvio que si f es constante entonces cumple ambas condiciones

$$f(z+1) = f(z)\,, \qquad f(z+i) = f(z)\,. \qquad ∎$$

Principio de los ceros aislados (teorema de la unicidad)

Principio de los ceros aislados. *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Supongamos que $f(z_n) = 0$ para infinitos puntos distintos $z_n \in \Omega$ que convergen a un punto $c \in \Omega$. Entonces $f \equiv 0$ en Ω.*

Dicho de otra manera: si Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω, no idénticamente nula, entonces los ceros de f no se pueden acumular en ningún punto de Ω (sólo pueden acumularse en el borde de Ω). Es decir, los ceros de f son todos aislados: para cada $c \in \Omega$ tal que $f(c) = 0$ existe $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ cuando $0 < |z - c| < r$.

Como corolario, la cantidad de ceros que tiene cualquier función analítica no idénticamente nula es finita o numerable.

Corolario (Teorema de la unicidad). *Si dos funciones holomorfas en un dominio Ω toman los mismos valores en una sucesión de puntos distintos que convergen a un punto del dominio, entonces coinciden en todo el dominio.*

Ejemplo 3 *Sabiendo sólo que f es holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, y que*

$$f(\frac{1}{n+1}) = 0\,, \qquad n = 1, 2, \dots\,,$$

se deduce que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$ ya que los puntos $1/(n+1)$ todos están en $\mathbb{D}$, son distintos dos a dos y convergen al punto 0 que también está en $\mathbb{D}$.

Suponiendo que f se anula en los números irracionales en el intervalo $(4/5, 1) \subset \mathbb{D}$, obtendríamos la misma conclusión porque los irracionales son densos en dicho intervalo y contienen una sucesión de números que converge a $9/10$, por ejemplo (no vale con una sucesión convergente a 1 porque el punto 1 no está en $\mathbb{D}$).

Problema 7 *Halle todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1) = \{z : \ |z-1| < 1\}$ y que allí satisfagan la condición*

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$$

Solución. Consideremos los puntos $z_n = n/(n+1)$. Despejando n de $z_n = n/(n+1)$: $n = z_n/(1 - z_n)$ y sustituyendo esta expresión en la ecuación de arriba, se obtiene

$$f(z_n) = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right)^2 + 2\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right) + 1} = 1 - \frac{(1-z_n)^2}{2z_n^2 + 2z_n(1-z_n) + (1-z_n)^2} = 1 - \frac{(1-z_n)^2}{1+z_n^2} = \frac{2z_n}{1+z_n^2}\,.$$

Esto nos sugiere una función que obviamente cumple esta condición:

$$f(z) = \frac{2z}{1+z^2}\,.$$

¿Puede haber otras?

Todos los puntos z_n están en el disco $D(1;1) = \{z : \ |z-1| < 1\}$; además, $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ y este límite también está en $D(1;1) = \{z : \ |z-1| < 1\}$. Según el Teorema de la unicidad (Principio de los ceros aislados), si dos funciones holomorfas en el disco indicado coinciden en todos los puntos z_n, entonces coinciden en todo el disco. Por tanto, la función encontrada es la única con dicha propiedad. ∎

Problema 8 *Halle todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ que satisfagan la condición $f(z) = f(z^2)$, para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Solución. Sea $a \in \mathbb{D}$ arbitrario; entonces $|a| < 1$ y, por tanto, lo mismo es cierto para todo a^k, $k \in \mathbb{N}$; además, $\lim_{k\to\infty} |a^k| = \lim_{k\to\infty} |a|^k = 0$. Aplicando la condición $f(z) = f(z^2)$ a los puntos $z = a$, $z = a^2$, $z = a^4$, etc. sucesivamente, obtenemos que

$$f(a) = f(a^2) = f(a^4) = f(a^8) = \dots$$

y, en general, $f(a^{2^n}) = f(a)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $a^{2^n} \in \mathbb{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^{2^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $0 \in \mathbb{D}$, el Principio de los ceros aislados nos dice que $f \equiv f(a) = cte$ en $\mathbb{D}$. ■

Observación. Si en vez de $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ suponemos que f es entera, utilizando el teorema de Liouville podríamos dar otra solución algo similar a la del ejercicio anterior. Para un z arbitrario pero fijo con $|z| > 1$, eligiendo un valor de la raíz cuadrada $\sqrt{z}$, otro de la raíz de orden 4, etc., veríamos que los valores de f en todos esos puntos coinciden; puesto que para algún n suficientemente grande, el módulo de la raíz 2^n-ésima de z será ≤ 2, podemos acotar $|f(z)|$ por su valor máximo en el disco cerrado $\overline{D}(0; 2) = \{z : |z| \leq 2\}$ que es, desde luego, finito.

Preparado en 2014-15 por Dragan Vukotić,

coordinador de la asignatura