Variable Compleja I ($3^{\underline{o}}$ de Matemáticas)

Apuntes sobre los teoremas de integración, con ejemplos resueltos (2014-15)

Singularidades aisladas. Residuos

Definición. Diremos que una función f tiene una *singularidad aislada* en el punto $z = a$ si f es holomorfa (analítica) en $\{z \in \Omega : \ z \neq a\}$ para un conjunto abierto Ω que contiene al punto a. Esto es equivalente a la condición de que f sea holomorfa en un disco agujereado $D^*(a;r) = D(a;r)\setminus\{a\} = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z-a| < r\}$.

Existen tres posibilidades en cuanto al comportamiento de la función f cerca de la singularidad aislada en el punto a:

(1) f está acotada en algún disco agujereado $D^*(a;R)$, donde $0 < R \le r$.

(2) $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ (pensando en términos de los números reales: $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$.);

(3) no se cumple ninguna de las condiciones (1) y (2).

En el caso (1) diremos que f tiene una *singularidad evitable* en a, en el caso (2), que tiene un *polo* en a y, en el caso (3), que f tiene una *singularidad esencial* en a.

El nombre "singularidad evitable" está justificado por el siguiente teorema:

Teorema de la singularidad evitable de Riemann. *Si f está acotada en algún disco agujereado $D^*(a;R)$, donde $0 < R \le r$, entonces, de hecho, existe el límite finito $L = \lim_{z\to a} f(z)$ y la función extendida:*

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in D^*(a;R), \\ L, & \text{si } z = a \end{cases}$$

(obviamente continua en $D(a;R)$) es, de hecho, holomorfa en $D(a;R)$.

Por tanto, una función holomorfa en un dominio Ω, salvo en un punto $a \in \Omega$ o en una cantidad finita de puntos en Ω (después de definir la extensión correspondiente), es a todos efectos como una función holomorfa en todo Ω.

Ejemplo 1. (a) La función

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z+1},$$

debido a la cancelación, es obviamente igual a $z-1$ cuando $z \neq -1$. Puesto que $z-1$ tiene límite finito cuando $z \to -1$ (de hecho, basta con observar que está acotada cerca de $z = -1$, por el teorema de Riemann), concluimos que f tiene una singularidad evitable en dicho punto. Lo mismo sucede con la función

$$g(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}$$

ya que $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$.

(b) Las funciones

$$f(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)^2}, \qquad g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

tienen polos, respectivamente, en $z = 1$ y en $z = 0$. Obsérvese que no hay cancelaciones en la fracción que representa la función f.

Proposición. Hemos demostrado en clase que toda f con un polo en $z = a$ puede escribirse como

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^n}$$

para un único número natural n, donde F es analítica en el dominio Ω y $F(a) \neq 0$. Equivalentemente, hay un único n tal que existe $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)$ y es $\neq 0, \infty$.

Definición. El número n arriba mencionado se llama el *orden* del polo $z = a$. Si $n = 1$, hablamos de un *polo simple* y si es igual a dos, de un *polo doble* en $z = a$.

Ejemplo 2. La función $f(z)$ del **Ejemplo 1. (b)** tiene un polo doble en $z = 1$, ya que

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1}(z^2-2) = -1 \neq 0\,,\infty\,.$$

Obsérvese que $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \infty$, mientras que $\lim_{z\to 1}(z-1)^3 f(z) = 0$.

En el caso de la función g del mismo apartado, el polo en $z = 0$ es simple, ya que

$$\lim_{z\to 0} z\,g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z = 1\cdot\cos 0 = 1\,.$$

Consideremos una función f analítica en un conjunto abierto Ω, salvo en un punto $a \in \Omega$ (una singularidad aislada). Entonces existe un disco abierto $D(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$, tal que f es analítica en el disco agujereado

$$D^*(a,r) = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z-a| < r\}\,.$$

Proposición. En las condiciones especificadas arriba, siendo $0 < \rho < r$ y la orientación de la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| = \rho\}$ siempre positiva, el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz$$

no depende de ρ.

Definición. El valor constante de las integrales de arriba se denomina el *residuo* de f en $z = a$.

Notación: $\operatorname{Res}(f;a)$.

Observación. Cuando $z = a$ es una singularidad evitable, entonces $\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz = 0$ y, por lo tanto, $\operatorname{Res}(f;a) = 0$.

Fórmulas para el cálculo del residuo en un polo. Si $z = a$ es un polo simple de f, entonces

$$\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,.$$

Si a es un polo doble, entonces

$$\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}[(z-a)^2 f(z)]'\,.$$

Más generalmente, si es un polo de orden n, entonces

$$\mathrm{Res}\,(f;a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\,.$$

Ejemplo 3. El residuo en el polo simple $z=0$ de la función g del **Ejemplo 1. (b)** es

$$\mathrm{Res}\,(g;0) = \lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z = 1\,.$$

El residuo en el polo doble $z=1$ de la función f del **Ejemplo 1. (b)** es

$$\mathrm{Res}\,(f;1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 1}[z^2-2]' = \lim_{z\to 1} 2z = 2\,.$$

Ejemplo 4. La función $e^{1/z}$ tiene en $z=0$ una singularidad esencial, ya que no está acotada en ningún entorno del origen ni tampoco tiende al infinito cuando $z\to 0$. Por ejemplo:

- la sucesión $z_n = 1/n \to 0$ y $f(z_n) = e^n \to \infty$ cuando $n\to\infty$;
- la sucesión $w_n = i/n$ también tiende a 0 cuando $n\to\infty$; sin embargo, $|f(w_n)| = |e^{-in}| = 1$.

¿Cómo calcular $\mathrm{Res}\,(f;0)$? Podemos hacerlo utilizando la serie de Laurent de f que se obtiene fácilmente del desarrollo de Taylor de la función entera e^w:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\,,$$

convergente absolutamente para todo w complejo. Sustituyendo $w=1/z$, se obtiene una serie en z convergente en todo $z\neq 0$:

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} = \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{z^k}{(-k)!}\,,$$

después del evidente cambio de índice $k=-n$. Hemos demostrado en clase que el residuo es igual al coeficiente a_{-1}, el que va unido a la potencia z^{-1}; en este caso,

$$\mathrm{Res}\,(f;0) = a_{-1} = 1\,.$$

Esto se puede comprobar directamente, integrando la serie término por término, es decir, intercambiando la suma y la integral sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$, por ejemplo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{0}\int_{\mathbb{T}}\frac{z^k}{(-k)!}\,dz = \int_{\mathbb{T}}\frac{1}{z}\,dz = 1\,,$$

recordando que la integral sobre $\mathbb{T}$ de cualquier potencia z^k es igual a cero, salvo cuando $k=-1$. Esto se ha visto en clase y, en cualquier caso, es fácil de comprobar parametrizando $\mathbb{T}$ de manera habitual: $z=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$.

Teorema de los residuos

¿Cómo integrar a lo largo de un contorno (camino) una función con varias singularidades aisladas dentro de dicho contorno? La respuesta viene dada por el siguiente resultado fundamental.

Teorema de los residuos. *Sea Ω un dominio y γ un contorno contenido en Ω, junto con su dominio interior, $\Omega_i(\gamma)$. Sea f una función analítica en Ω, salvo en las singularidades aisladas c_1, c_2,..., c_n, todas ellas contenidas en $\Omega_i(\gamma)$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(c_k)\,.$$

Obsérvese que la fórmula integral de Cauchy constituye el caso especial $n = 1$ de este teorema (con un polo simple), mientras que la fórmula de Cauchy generalizada para la derivada de orden n corresponde al caso de un polo es de orden mayor que uno.

Ejemplo 5. *Siendo $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva, calcule*

$$\int_{\mathbb{T}} e^{1/z}\, dz\,.$$

Ya sabemos que $\mathrm{Res}\,(e^{1/z}; 0) = 1$ (Ejemplo **7**) y $z = 0$ es obviamente la única singularidad aislada de $f(z) = e^{1/z}$ en el plano. Por el Teorema de los residuos,

$$\int_{\mathbb{T}} e^{1/z}\, dz = 2\pi i\,.$$

Ejemplo 6. *Evalúe la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{2\, dz}{4z^2 - 1}\,,$$

donde γ es la circunferencia unidad $\{z : |z| = 1\}$ con la orientación positiva.

Solución. El problema se puede resolver de distintas maneras. En una hoja anterior ya vimos una. He aquí otra, vía el teorema de los residuos. La función

$$f(z) = \frac{2}{4z^2 - 1} = \frac{1}{2(z - 1/2)(z + 1/2)}$$

evidentemente tiene dos polos simples en el plano complejo: $c_1 = 1/2$ y $c_2 = -1/2$, ambos dentro de la curva γ, que es simple, cerrada y C^1. Por tanto, aunque no sea aplicable la fórmula integral de Cauchy, el *Teorema de los residuos* sí lo es:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\,(f; c_1) + \mathrm{Res}\,(f; c_2)\right)\,.$$

Para evaluar esos residuos, utilizamos la fórmula habitual para el residuo en un polo simple:

$$\mathrm{Res}\,(f; c_1) = \lim_{z\to 1/2}(z - 1/2)f(z) = \lim_{z\to 1/2}\frac{1}{2(z + 1/2)} = \frac{1}{2}\,.$$

De manera análoga, $\operatorname{Res}(f;c_2) = -\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1} dz = 0 \,.$$

Observación: a pesar de que el resultado de integración sea cero, no podríamos haberlo obtenido usando el teorema de Cauchy, ya que éste no era aplicable. ■

Ejemplo 7. Calcule la integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz \,,$$

donde $R > 1$, $\gamma_R = I_R + C_R$, $I_R = [-R, R]$ y C_R es la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$. La curva γ_R está orientada en el sentido positivo.

Solución. Puesto que $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$, se observa que

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \,.$$

Por tanto, f es analítica en el conjunto abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ z \neq \pm i\}$ y tiene dos polos dobles en el plano: $z = i$ y $z = -i$. Sin embargo, sólo el polo $z = i$ se encuentra en el interior de γ_R (ya que $R > 1$). Hallamos el valor del residuo en ese polo según la fórmula para un polo doble, por la fórmula vista antes:

$$\operatorname{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}[(z-i)^2 f(z)]' = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} \,.$$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \,. \qquad \blacksquare$$

Los cálculos como éste serán muy importantes a la hora de evaluar diversas integrales impropias de funciones reales.

Integración de algunas funciones trigonométricas en $[0, 2\pi]$

Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva. Podemos parametrizarla, escribiendo cada punto $z \in \mathbb{T}$ como

$$z = e^{it} \,, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \,.$$

Además, tal y como se ha visto en clase, se deduce de la fórmula de Euler que

$$z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t \,, \qquad z - \frac{1}{z} = e^{it} - e^{-it} = 2i \operatorname{sen} t \,.$$

Por consiguiente,

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \,, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

para los puntos $z = e^{it} \in \mathbb{T}$. Observando que $dz = ie^{it}\,dt = iz\,dt$ y que, por tanto, podemos escribir $dt = dz/(iz)$, todo esto nos permite escribir las diferentes integrales trigonométricas de la forma

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t,\, \operatorname{sen} t)\, dt\,,$$

donde u es una función elemental de dos variables reales, como integrales sobre el contorno $\mathbb{T}$:

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t,\, \operatorname{sen} t)\, dt = \int_{\mathbb{T}} u\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}\,,$$

con lo cual transformamos la integral inicial de una función real en otra integral de una función compleja elemental de z. En nuestros ejemplos, esta nueva función de z será analítica y con frecuencia racional, así que luego podremos aplicar la fórmula integral de Cauchy o el teorema de los residuos.

Ejemplo 8. *Calcule el valor de la integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 4\operatorname{sen} t}\, dt\,.$$

Solución. De manera similar a las deducción de las fórmula de arriba, también obtenemos

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right), \qquad z = e^{it} \in \mathbb{T}\,.$$

Aplicando las fórmulas indicadas, se deduce que

$$I = \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \frac{2}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{\mathbb{T}} \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}\, dz$$

La función obtenida

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}$$

tiene tres polos: un polos doble $z = 0$ y dos simples: $z = 2i$ y $z = i/2$. Esto es cierto porque $z = 2i$ y $z = i/2$ son los ceros del polinomio $-2z^2 + 5iz + 2$, lo cual permite la siguiente factorización:

$$-2z^2 + 5iz + 2 = -2(z - \frac{i}{2})(z - 2i)$$

y, por tanto,

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)} = \frac{z^4 + 1}{-4z^2(z - \frac{i}{2})(z - 2i)}\,.$$

Dos de los polos se encuentran dentro de $\mathbb{T}$: el polo simple $i/2$ y el doble $z = 0$. Aplicando las fórmula habituales para el cálculo del residuo en un polo (simple y doble, respectivamente), después de un poco de cálculo, obtenemos:

$$\operatorname{Res}(f; \frac{i}{2}) = \frac{17i}{24}\,, \qquad \operatorname{Res}(f; 0) = \frac{-5i}{8}\,.$$

Por el teorema de los residuos, obtenemos

$$I = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{Res}(f; \frac{i}{2}) + \operatorname{Res}(f; 0)\right) = -\frac{\pi}{6}\,. \qquad \blacksquare$$

Estimaciones para las integrales de línea

En lo que sigue, γ será una curva C^1 a trozos, parametrizada de la siguiente manera: $z = \gamma(t)$, $a \le t \le b$. Puede ser un simple y cerrada (un contorno) o no. Ya hemos definido que $dz = \gamma'(t)\,dt$ y ahora acordemos que

$$|dz| = |\gamma'(t)|\,dt\,,$$

una cantidad siempre no negativa. Entenderemos, por tanto, que

$$\int_\gamma u(z)|dz| = \int_a^b u(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt\,.$$

En particular, poniendo $u \equiv 1$ y escribiendo $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$, $\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t)$, obtenemos

$$\int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\,dt = l(\gamma)\,,$$

donde $l(\gamma)$ denota la longitud de la curva γ.

Proposición. Si γ es una curva C^1 a trozos, f una función continua en (la traza de) γ y M una constante tal que $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \gamma$ (por ejemplo, $M = \max_{z\in\gamma} |f(z)|$), entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \le M \int_\gamma |dz| = M \cdot l(\gamma)\,.$$

Utilizaremos esta propiedad con frecuencia, no sólo para acotar las integrales, sino fundamentalmente para demostrar que cuando el contorno depende de un número positivo R y $R \to +\infty$, entonces la integral $\int_\gamma f(z)\,dz \to 0$, lo cual será fundamental en el cálculo de distintas integrales reales.

Ejemplo 9. Denotemos por C_R la semi-circunferencia, de radio R en el semiplano superior, centrada en el origen, desde R hasta $-R$. Demostrar que

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,.$$

<u>Solución</u>. Necesitamos una cota superior, M, para la función $1/(z^2+1)^2$ en C_R. Por tanto, debemos acotar el denominador $(z^2+1)^2$ inferiormente.

Cuando z pertenece a la semi-circunferencia C_R, tenemos $|z| = R$ y, aplicando una forma de la desigualdad triangular: $|a-b| \ge |a| - |b|$, con $a = z^2$, $b = -1$, obtenemos $|z^2+1| \ge |z^2| - 1 = R^2 - 1 > 0$. Por lo tanto, $|z^2+1|^2 \ge (R^2-1)^2$ y, finalmente,

$$\left|\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \le \int_{C_R} \frac{1}{(R^2-1)^2}|dz| = \frac{1}{(R^2-1)^2}\,l(C_R) = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}\,.$$

Puesto que $\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = 0$, se sigue que

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,. \qquad \blacksquare$$

Lema de Jordan. Para todo $R > 0$ se tiene la desigualdad

$$0 < \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt < \frac{\pi}{R}.$$

Demostración. Utilizando la *desigualdad de Jordan* vista en los cursos de Cálculo:

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} t \ge \frac{2}{\pi} t$$

y la simetría de la gráfica de la función $e^{-R \operatorname{sen} t}$ respecto a la recta vertical $t = \pi/2$, obtenemos que

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt \le 2 \int_0^{\pi} e^{-2Rt/\pi}\, dt = \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{R}.$$

La positividad de la integral es obvia. ■

Ejemplo 10. Sea C_R la semi-circunferencia del ejemplo anterior. Demostrar que

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2 + 1}\, dz \to 0, \qquad R \to +\infty.$$

Solución. Por la desigualdad triangular, para $|z| = R > 0$ y R suficientemente grande (por ejemplo, $R > 2$ será suficiente), obtenemos $|(z-1)^2 + 1| \ge |z-1|^2 - 1 \ge (R-1)^2 - 1$. Escribiendo $z = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, observemos también que en C_R se cumple

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos t - R \operatorname{sen} t}| = e^{-R \operatorname{sen} t}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que en C_R: $dz = Re^{it}\, dt$ y aplicando el Lema de Jordan, obtenemos

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2 + 1}\, dz \right| \le \int_{C_R} \left| \frac{e^{iz}}{(z-1)^2 + 1} \right| |dz| \le \frac{R}{(R-1)^2 - 1} \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt < \frac{\pi}{(R-1)^2 - 1} \to 0$$

cuando $R \to +\infty$. ■

Cálculo de ciertas integrales impropias (sobre intervalos infinitos)

El cálculo de residuos es muy efectivo para evaluar ciertas integrales impropias de funciones racionales (y otras).

Ejemplo 11. *Compruebe la convergencia de la integral*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y evaluarla, usando los residuos.

Solución. En primer lugar, la integral converge ya que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y ambas integrales convergen. La integral sobre el intervalo $[0,1]$ converge porque no es impropia sino una integral habitual de Riemann de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. La integral impropia sobre el intervalo $(1,+\infty$ converge debido al *criterio de comparación*, ya que

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} < \frac{1}{x^4}\,, \qquad x > 1\,,$$

y $\int_1^\infty 1/x^4\,dx$ converge.

Sin embargo, el cálculo de las integrales de este tipo suele ser no trivial. Para calcular I, utilizaremos el método de los residuos. Consideraremos el contorno ya habitual: $\gamma_R = I_R + C_R$, donde $I_R = [-R, R]$ y C_R es la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$; le daremos a γ_R la orientación positiva, de modo que el intervalo I_R se recorrerá desde $-R$ hasta R y C_R desde R hasta $-R$.

Cuando $R > 1$, la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ tiene un polo doble, a saber, $z = i$, dentro de γ_R. Usando el teorema de los residuos, en el **Ejemplo 7** hemos evaluado la integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

Observemos que su valor es independientemente de R, siempre y cuando $R > 1$. Por otro lado, parametrizando el intervalo I_R simplemente como $z = x$, $-R \le x \le R$, obtenemos

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

puesto que en el **Ejemplo 9** hemos demostrado que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = 0\,.$$

Dado que $f(x) = 1/(x^2+1)^2$ es una función par, se sigue que

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = 2I$$

y, por tanto, $I = \pi/4$. ■

El método de los residuos también es útil cuando tenemos una integral mixta, involucrando una función racional y otra trigonométrica. Para ello conviene utilizar el lema de Jordan explicado antes.

Ejemplo 12. *Usando los residuos, evalúe las integrales*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}\,, \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}\,,$$

comprobando previamente su convergencia.

Solución. La integral I es convergente. Primero observemos que

$$\left|\frac{\cos x}{(x-1)^2+1}\right| \le \frac{1}{(x-1)^2+1} \sim \frac{1}{x^2}\,, x\to\infty\,.$$

Dado que $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ converge, el *criterio asintótico* demuestra que converge la integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

y entonces, según el *criterio de comparación*, la integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}$$

converge absolutamente. De manera análoga, se demuestra que converge absolutamente la integral

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}\,,$$

mientras que la integral desde -1 hasta 1 de la misma función tiene valor finito, al ser la integral de una función continua en un intervalo finito y cerrado (el denominador no se anula). La comprobación es completamente similar para la integral del seno.

Demostrada la convergencia, pasamos a la evaluación de las integrales usando el método de los residuos. Integraremos la función convenientemente elegida:

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}$$

sobre el mismo contorno $\gamma_R = I_R + C_R$ que en los ejemplos anteriores. Hemos elegido esta función en lugar de una con funciones trigonométricas motivados por la identidad de Euler

$$e^{iz}=\cos z + i\,\mathrm{sen}\, z\,.$$

Determinemos ahora las singularidades aisladas de f. Es fácil ver que $(z-1)^2+1=0$ si y sólo si $z-1=\pm i$, es decir, los ceros de este polinomio son $z=1\pm i$. Así obtenemos la factorización

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$$

De los dos polos simples de f, sólo $z=1+i$ se encuentra dentro de γ_R, cuando R es suficientemente grande, a ser precisos, cuando $R>|1+i|=\sqrt{2}$. Es fácil calcular el residuo en este polo:

$$\mathrm{Res}\,(f;1+i)=\lim_{z\to1+i}(z-1-i)f(z)=\lim_{z\to1+i}\frac{e^{iz}}{z-1+i}=\frac{e^{-1+i}}{2i}\,.$$

Según el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\,(f;1+i) = 2\pi i\cdot\frac{e^{-1+i}}{2i} = \pi e^{-1}(\cos 1 + i\,\mathrm{sen}\,1)\,.$$

Una vez más, tenemos

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx\,.$$

En el **Ejemplo 10** ya hemos demostrado que $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$, cuando $R \to +\infty$, utilizando el *lema de Jordan*. Finalmente, pasando al límite cuando $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{e}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}\,.$$

Igualando las partes reales e imaginarias en los dos extremos de la igualdad anterior, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1} = \frac{\pi}{e}\cos 1\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1} = \frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 1\,. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 13. *Evalúe la integral*

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx\,,$$

comprobando previamente su convergencia para todo $p \in (-1,1)$.

Solución. Cerca de $x = 0$, la función $x^p/(1+x^2) \sim x^p$ y la integral $\int_0^1 x^p\,dx$ converge si y sólo si $p > -1$. Por tanto, la integral $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$ converge si y sólo si $p > -1$. Cuando $x \to +\infty$, la función $x^p/(1+x^2) \sim 1/x^{2-p}$ y $\int_1^{+\infty} 1/x^{2-p}\,dx$ converge si y sólo si $p < 1$. Por consiguiente, I_p converge si y sólo si se cumplen a la vez ambas condiciones: $p > -1$ y $p < 1$.

Consideraremos la función compleja $f(z) = z^p/(1+z^2)$ definida en un dominio conveniente. Por ejemplo, podemos definir la función $z^p = e^{p \log z}$, eligiendo la siguiente rama del logaritmo: $\log z = \ln|z| + i \arg z$, en el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi/2 < \arg z < (3\pi)/2\}$, el plano menos el semieje imaginario negativo. Conviene elegir el siguiente contorno $\gamma_{R,\varepsilon}$ en Ω:

$$\gamma_{R,\varepsilon} = C_R + I^- + C_\varepsilon + I^+\,,$$

donde R es grande y ε pequeño, $C_R = \{z = Re^{it} : \ 0 \le t \le \pi\}$ es la semi-circunferencia de centro en el origen y radio R contenida en el semiplano superior, recorrida desde R hasta $-R$, $I^- = [-R, -\varepsilon]$ (intervalo en el semieje real negativo), $C_\varepsilon = \{z = \varepsilon e^{it} : \ \pi \ge \varepsilon \ge 0\}$ es una semi-circunferencia contenida en el semiplano superior, de centro en el origen y radio ε, recorrida desde $-\varepsilon$ hasta ε y, por fin, $I^+ = [\varepsilon, R]$ (intervalo en el semieje real positivo). De esta forma el contorno, junto con el dominio interior que acota, se queda dentro del dominio Ω donde está definido el logaritmo complejo.

Nuestra función f es holomorfa en Ω, salvo en un polo simple, $z = i$, que se encuentra en el interior del contorno. Teniendo en cuenta que $i = e^{\pi i/2}$ y, por tanto, $i^p = e^{\pi i p/2}$, calculamos el residuo correspondiente:

$$\operatorname{Res}(f; i) = \frac{i^p}{2i} = \frac{\cos(\pi p)/2 + i \operatorname{sen}(\pi p)/2}{2i}$$

Es fácil ver que

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \pi R \cdot R^p/(R^2-1) \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,,$$

ya que $p+1<2$. De manera similar,

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le \pi\varepsilon\cdot\varepsilon^p/(1-\varepsilon^2)\to 0\,,\qquad \varepsilon\to 0^+\,,$$

teniendo en cuenta que $p+1>0$.

Cuando $z\in I^-$, tenemos que $z=x<0$ y por tanto $\log z=\ln(-x)+\pi i$. Con la rama del logaritmo escogida, calculamos

$$z^p = e^{p\log z} = e^{p\ln(-x)+p\pi i} = e^{p\pi i} = (\cos(\pi p)+i\,\mathrm{sen}(\pi p))\cdot(-x)^p$$

y, por tanto,

$$\int_{I^-} f(z)dz = (\cos(\pi p)+i\,\mathrm{sen}(\pi p))\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{(-x)^p}{1+x^2}dx = (\cos(\pi p)+i\,\mathrm{sen}(\pi p))\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^p}{1+x^2}dx$$

(cambiando x por $-x$).

Puesto que $\int_{C_R} f(z)\,dz\to 0$ cuando $R\to+\infty$ y $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ cuando $\varepsilon\to 0^+$, obtenemos en el límite que

$$\begin{aligned}
2\pi i\mathrm{Res}\,(f;i) &= \pi(\cos\frac{\pi p}{2}+i\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi p}{2})\\
&= \lim_{R\to+\infty\,,\,\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz\\
&= (\cos(\pi p)+i\,\mathrm{sen}(\pi p))\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx\,.
\end{aligned}$$

Tomando las partes reales y usando la identidad $\cos(2x)+1=\cos^2 x$, obtenemos

$$\pi\cos\frac{\pi p}{2} = (\cos(\pi p)+1)\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx = 2\cos^2\frac{\pi p}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx\,,$$

Despejando la integral, se sigue que

$$I_p = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}\,. \qquad \blacksquare$$

Preparado por Dragan Vukotić,
Coordinador de la asignatura
en 2008 y 2015