**Variable Compleja I** (2014-15)
**Ejercicios resueltos**

## *Convergencia de series. Series de potencias*

**Ejercicio 1** *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{n^3}.$$

SOLUCIÓN. Observemos primero que el coeficiente $a_k$ de la serie es no nulo si y sólo si $k = n^3$ y que en este caso $n = k^{1/3}$. Así obtenemos la siguiente fórmula para el coeficiente $k$-ésimo:

$$a_k = \begin{cases} (-2)^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia, obtenemos

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 2^{(k^{1/3}/k)} = \lim_{k\to\infty} 2^{k^{-2/3}} = 2^0 = 1.$$

Finalmente, $R = 1$.

**Ejercicio 2** *Calcule el radio de convergencia y la suma de las series de potencias:*

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) z^n.$$

SOLUCIÓN. (a) El radio de convergencia de la primera serie podría calcularse como en el problema anterior, teniendo en cuenta que muchos términos son nulos. No obstante, existe un método alternativo. Después del cambio de variable $w = z^3$, la serie se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n!}$. Dado que el término general de esta nueva serie:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

contiene factoriales, es conveniente calcular el radio de convergencia usando la fórmula del cociente:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Puesto que la serie converge para cada $w = z^3$ finito, se sigue que la serie inicial también converge para todo $z$. Por lo tanto, su radio de convergencia es $+\infty$.

Podemos hacer más. Recordando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \,,$$

siendo la serie absolutamente convergente para todo $z$ complejo y uniformemente convergente en todo disco cerrado (de radio finito), la primera serie puede escribirse como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^3)^n}{n!} = -e^{-z^3}$$

y se deduce que también converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier disco cerrado.

(b) Como en el apartado anterior, calculamos fácilmente que el radio de convergencia de la segunda serie es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1\,.$$

Recordemos que la serie geométrica también converge absolutamente en el disco unidad y su suma es

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\,.$$

Por tanto, se puede derivar en el disco unidad, obteniendo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}\,.$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,z^{k-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^{n-1}\,.$$

Finalmente, después de la multiplicación por $z$ se obtiene

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^n\,.$$

■

**Ejercicio 3** *¿Para qué valores de $z$ converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$?*

Solución. Después del cambio de variable

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

la serie se convierte en geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}w^n=\frac{1}{1-w}=\frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}}=\frac{1-z}{-2z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2z}\,.$$

Puesto que la serie geométrica sólo converge cuando $|w|<1$, nuestra serie será convergente sólo cuando $|1+z|<|1-z|$. Es decir, cuando $|z-(-1)|<|z-1|$.

Geométricamente, representa el lugar geométrico de los puntos que están más cerca de $-1$ que de $1$, que es el semiplano izquierdo abierto.

Algebraicamente, es el conjunto de los puntos para los que $|1+z|^2<|1-z|^2$ o, equivalentemente,

$$1+|z|^2+2\mathrm{Re}\,z<1+|z|^2-2\mathrm{Re}\,z\,.$$

Esto viene a decir que $\mathrm{Re}\,z<0$, el semiplano izquierdo abierto. ■

**Ejercicio 4** *Demuestre que las series complejas*

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\cos(nz)\,,\qquad\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}\mathrm{sen}(nz)$$

*convergen uniformemente en cada banda horizontal cerrada*

$$\Omega_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}\colon|\mathit{Im}\ z|\le 1-\varepsilon\}\,,\quad\varepsilon>0\,.$$

Solución. Cuando $z=x+iy\in\Omega_\varepsilon$, tenemos $|y|\le 1-\varepsilon$ y, por tanto, $e^{\pm y}\le e^{1-\varepsilon}$. Luego

$$\begin{aligned}|e^{-n}\cos nz| &= \left|e^{-n}\cdot\frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}\right|=\frac{e^{-n}}{2}\cdot\left|e^{inx}e^{-ny}+e^{-inx}e^{ny}\right|\\ &\le \frac{e^{-n}}{2}\cdot\left(e^{-ny}+e^{ny}\right)\le\frac{e^{-n}}{2}\cdot 2\cdot e^{n(1-\varepsilon)}=e^{-n\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

La serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\varepsilon}$ es sumable por ser una serie geométrica cuya razón es $q=e^{-\varepsilon}<1$. El criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\cos nz$ converge uniformemente en cada $\Omega_\varepsilon$. ■

**Ejercicio 5** *Sea $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, donde $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le 1$. Demuestre que $f$ es una función holomorfa e inyectiva en el disco unidad $\mathbb{D}=\{z:\ |z|<1\}$.*

Solución. Para ver que $f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, basta ver que su serie de potencias centrada en el origen tiene radio de convergencia, por lo menos, uno. La hipótesis $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le 1$ implica que $|a_n|\le 1/n$ para todo $n\ge 2$. Tomando las raíces $n$-ésimas, se sigue fácilmente de la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}$$

que el radio de convergencia de la serie de potencias que define la función $f$ es, por lo menos, uno y, por tanto, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Para comprobar que $f$ es inyectiva, supongamos que $f(z) = f(w)$, para $z$, $w \in \mathbb{D}$. Esto significa que

$$\begin{aligned} f(z) - f(w) &= z - w + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^n - w^n) \\ &= (z-w) \cdot \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots w^{n-1}) \right) . \end{aligned}$$

Debido a nuestra hipótesis sobre los coeficientes $a_n$ y teniendo en cuenta que $|z|$, $|w| < 1$, tenemos

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots w^{n-1}) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z|^{n-1} + |z|^{n-2}|w| + \dots |w|^{n-1}) < \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1 .$$

La desigualdad de arriba es estricta ya que $a_n \neq 0$, así que la igualdad

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots w^{n-1}) = 0$$

es imposible y, por tanto, $z = w$, lo cual prueba que $f$ es inyectiva en $\mathbb{D}$. ■

**Ejercicio 6** *Hállense todas las funciones enteras $f$ que satisfagan la ecuación funcional*

$$f(2\,z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}$$

*para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Solución. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo de $f$ en serie de Taylor; éste es convergente en todo $\mathbb{C}$ por ser $f$ entera. Si $f$ cumple la ecuación indicada, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n z^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} \, a_n z^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Por la unicidad de los coeficientes de Taylor, se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$2^n a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \, a_n .$$

Por tanto, si algún $a_n \neq 0$, se obtiene

$$2^n = \frac{1 + (-1)^n}{2} ,$$

pero esto es imposible cuando $n \geq 1$ ya que entonces $2^n \geq 2$ mientras que

$$\frac{1 + (-1)^n}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1 .$$

Se sigue que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, así que sólo el coeficiente $a_0$ puede ser no nulo, lo cual implica que $f \equiv cte.$

Es fácil comprobar que toda función constante efectivamente cumple la ecuación dada. Por tanto, las constantes son las únicas soluciones. ■

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura

Abril de 2015