Variable Compleja I, Curso 2014-15

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 3 de problemas

Polinomios

1) Sean $\omega_1, \dots, \omega_n$ las n raíces n-ésimas de la unidad, es decir $\omega_j = e^{2\pi i(j/n)}$, $j = 1, \dots, n$.

a) Pruebe que si m es un número natural, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\omega_j)^m = \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ no es múltiplo de } n \\ 1, & \text{si } m \text{ es múltiplo de } n \end{cases}$$

b) Si $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_m z^m$, $m \leq 2n-1$, demuestre que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(\omega_j) = a_0 + a_n.$$

2)* *Resolución de la ecuación cúbica:* Consideremos la ecuación cúbica $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$.

a) Aplique un cambio de variable $z = w + h$ para obtener una ecuación equivalente de la forma $w^3 + \beta w + \gamma = 0$.

b) Haga ahora un cambio $w = gu$ que nos dé una ecuación de la forma $4u^3 - 3u + \delta = 0$.

c) Sea $v \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{sen}(3v) = \delta$. Demuestre que $\alpha = \operatorname{sen} v$ es raíz de la ecuación que aparece en (ii).

d) Aplique este procedimiento a la ecuación $z^3 + 3z^2 - 1 = 0$.

3) Demuestre que existe un único polinomio P_n de grado n tal que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Ayuda: Puede hacerse por inducción. El caso $n = 1$ es obvio. Conviene escribir $z^n + \frac{1}{z^n} - (z + \frac{1}{z})^n$ y usar que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ con la hipótesis de inducción.

4)* El objetivo de este ejercicio es demostrar el resultado conocido como el *teorema de Gauss-Lucas* (apartado c)).

a) Demuestre que si z_1 $z_2, \dots, z_n$ son números complejos entonces el polígono convexo más pequeño que los contiene (posiblemente degenerado) viene dado por

$$\{z = t_1 z_1 + t_2 z_2 \cdots + t_n z_n : \ t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0 \text{ y } t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1\}.$$

b) Compruebe que el polígono del apartado anterior es la intersección de todos los semiplanos que contienen a $z_1, z_2, \dots, z_n$.

c) Demuestre que si $P(z)$ es un polinomio, su derivada $P'(z)$ no puede tener ceros fuera del polígono convexo más pequeño que contiene a las raíces de $P(z)$.

Ayuda: Escriba $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$ y considere $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$ para expresar los ceros de $P'(z)$ en la forma $m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n$ o use el apartado **b)**.

Funciones exponenciales y trigonométricas

5) Desarrolle en series de potencias (centradas en el origen) las siguientes funciones elementales:

$$(1-z)\cos z\,, \qquad (\cos z)/(1-z^2)\,, \qquad \frac{e^{-z}}{1+z}\,,$$

indicando en cada caso el radio de convergencia. Hágase lo mismo para la función $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z\cos z$ de dos maneras distintas. (Si no resulta fácil encontrar una fórmula general para los coeficientes, basta con escribir los 5 primeros términos de cada serie.)

6) Escriba explícitamente la función cuya serie de potencias es $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!}$. ¿Cuánto vale $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}$? (**Ayuda:** Evalúe la función exponencial en los puntos $\pm z$ y $\pm iz$.)

7) ¿Para qué valores $z\in\mathbb{C}$ se cumple que $\overline{e^{iz}}=e^{i\bar{z}}$?

8) Demuestre que: **a)** $\operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1$, **b)** $\cos(2z)=\cos^2 z-\operatorname{sen}^2 z$.

9) Resuelva las siguientes ecuaciones: **a)** $\cos z=2$; **b)** $\operatorname{sen} z=\frac{3}{4}-\frac{i}{4}$.

Raíces, logaritmos y potencias complejas

10) Calcule los siguientes valores:

a) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{5\frac{\pi i}{4}}$, $e^{-7\frac{\pi i}{3}}$, $\exp\left[\pi\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\right]$, $\cos(2+3i)$, $\operatorname{sen}(1+i)$

b) $(1-i)^i$, 2^{-1+i}, $i^{\sqrt{2}}$, tomando la rama principal del logaritmo.

c) i^{-i}, $\log 3$, $\log(\sqrt{3}+i)$, $(1+i)^{1+i}$, $2^{\pi i}$ (calcular todos los posibles valores).

11) * Denotemos por $\{\arg z\}$ el conjunto de todos los valores posibles de $\arg z$, por $\{\log z\}$ el conjunto de todos los valores posibles de $\log z$ y por $\left\{z^b\right\}$ el conjunto de todos los valores posibles de z^b, con el significado evidente $\{\log z\}=\log|z|+i\,\{\arg z\}\,,\left\{z^b\right\}=e^{b\{\log z\}}$. Compruebe que:

a) $\{\log(zw)\}=\{\log z\}+\{\log w\}$ (aquí $A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$)

b) $\left\{(zw)^b\right\}=\left\{z^b\right\}\cdot\left\{w^b\right\}$ (aquí $A\cdot B=\{ab: a\in A, b\in B\}$)

c) $\{\log(z^\alpha)\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\alpha\{\log z\}+2k\pi i)$.

12) (Teorema del binomio para exponentes reales) Sea α un número real con $\alpha\notin\mathbb{N}$ y sea

$$\binom{\alpha}{0}=1,\ \binom{\alpha}{1}=\alpha,\ \binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}\ \text{ si } j>1$$

a) Demuestre que el radio de convergencia de la serie $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k$ es 1.

b) Compruebe que $(1+z)F'(z)=\alpha F(z)$.

c) Concluya que $F(z)=(1+z)^\alpha$, es decir, $(1+z)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k$ si $|z|<1$.

(Aquí se toma la rama principal de w^α.)