Variable Compleja I, Curso 2014-15

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 2 de problemas

1) (*Esfera de Riemann.*) Se considera $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y se definen los entornos de ∞ como aquellos que contienen un conjunto de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para algún $R > 0$.
Con estos entornos $z_n \to \infty$ quiere decir que:

$$\textit{Para todo } R > 0 \textit{ existe } N \textit{ tal que } |z_n| > R \textit{ para todo } n > N$$

Igualmente, $\lim_{z\to\infty} f(z) = a$ quiere decir:

$$\textit{Para todo } \epsilon > 0 \textit{ existe } R > 0 \textit{ tal que para todo } z \textit{ con } |z| > R \textit{ se tiene } |f(z) - a| < \epsilon$$

De manera similar se definen $\lim_{z\to b} f(z) = \infty$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.
Sea $\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\}$ y consideremos la proyección estereográfica:

$$\pi : \mathbb{S}^2 \to \hat{\mathbb{C}}, \quad \pi(p) = \begin{cases} \dfrac{(p_1 + ip_2)}{1 - p_3} & \text{si } p \neq \mathbf{N} = (0,0,1) \\ \infty & \text{si } p = \mathbf{N} \end{cases}$$

a) Compruebe que $\pi^{-1}(z) = \left(\dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \dfrac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$.

b) Sea $\rho(z, w) =$distancia (en $\mathbb{R}^3$) entre $\pi^{-1}(z)$ y $\pi^{-1}(w)$ para $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$. Entonces:

$$z_n \to z \text{ en } \hat{\mathbb{C}} \iff \rho(z_n, z) \to 0$$

c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n} = \infty$ si $|z| > 1$.

2) a) Demuestre que, mediante la proyección estereográfica, las circunferencias sobre la esfera se transforman en circunferencias o rectas del plano. ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

b) ¿Qué corresponde en la esfera de Riemann a una familia de rectas paralelas del plano?

c) Halle, en la esfera de Riemann, las imágenes de los conjuntos definidos por las siguientes desigualdades:

i) $\operatorname{Im} z > 0$, **ii)** $\operatorname{Re} z < 1$, **iii)** $|z| < 1$, **iv)** $|z| > 2$

3) Decida si las sucesiones $z_n = \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n$, $w_n = \left(\frac{3-4i}{5}\right)^n$ tienen límite (finito) o no.

4) Decida razonadamente si las siguientes funciones tienen límite (finito) o no en el punto indicado:

a) $f(z) = \dfrac{|z|^2}{z}$ (para $z \neq 0$) en el punto $z = 0$.

b) $f(z) = \dfrac{z^3 - 8i}{z + 2i}$ (para $z \neq -2i$) en el punto $-2i$.

5) Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$ son polinomios con $a_n \neq 0 \neq b_m$, entonces se tiene

$$\lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)}, = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

b) No existe $\lim_{z \to \infty} e^z$.

6) Halle los puntos de continuidad de las funciones

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4 - 1}{z - i} & \text{si } z \neq i \\ 4i & \text{si } z = i, \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

7) ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones?

a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + ixy$.

b) $f(z) = g(\overline{z})$, donde g es holomorfa en Ω.

c) $f(z) = \overline{g(z)}$, donde g es holomorfa en Ω.

d) $f(z) = \overline{g(\overline{z})}$, donde g es holomorfa en Ω.

e) $f(z) = |g(z)|$, donde g es holomorfa en Ω.
Ayuda: en los apartados de b) a e) basta con usar la definición de derivada.

8) ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones? ¿Cuál es su derivada?

a) $z + \dfrac{1}{z}$, **b)** $\dfrac{1}{(z + 1/z)^2}$, **c)** $\dfrac{1}{(z-1)(z^2-2)}$, **d)** $\dfrac{z}{z^n - 2}$, (n entero positivo)

e) e^{e^z}, **f)** $\operatorname{sen}(e^z)$, **g)** $\cos \overline{z}$, **h)** $e^{z+1/z}$, **i)** $\dfrac{e^z}{z^2+2}$, **j)** $\dfrac{1}{e^z - 1}$

k) $\log(e^z + 1)$, **l)** $\sqrt{e^z + 1}$, **m)** $\sqrt{z^3 - 1}$, **n)** $\operatorname{sen} \sqrt{z}$, **o)** z^{2z}

Nota: En los últimos casos hay que elegir una rama del argumento (para log, $\sqrt{\ }$, etc...).

9)* Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Definimos la derivada de T en la dirección $\vec{w} = (a, b)$ como

$$D_{\vec{w}} T = \lim_{t \to 0} \frac{T(x + ta, y + tb) - T(x, y)}{t}.$$

Observe que

$$D_{\vec{w}} T = (D_{\vec{w}} u, D_{\vec{w}} v).$$

Dada la función compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, demuestre que si f es holomorfa, entonces

$$D_{\vec{w}} f = f'(z)w \quad \text{donde} \qquad w = a + ib.$$

10) * Sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Demuestre que si $|f|$ es constante en Ω, entonces f es constante.

11) * Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si h es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y f es holomorfa, entonces $\Delta(h \circ f) = (\Delta h \circ f)|f'|^2$.

b) Si f es holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, entonces

$$\Delta(|f|) = \frac{|f'|^2}{|f|}.$$

c) Si f, g son holomorfas en un dominio Ω, y si $|f| + |g|$ es constante en Ω y f y g no se anulan en Ω, entonces f y g son constantes.

12) Halle el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$, **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$, **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$, **e)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{1+2^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$, **g)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, **h)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, **i)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$, **j)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \dfrac{z^n}{n^n}$

13) Supongamos que los radios de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ son iguales a r_1 y r_2 respectivamente. ¿Qué se puede decir respecto a los radios de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n?$$

14) Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, se verifican las identidades:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}.$$

15) Desarrolle las siguientes funciones en series potencias del tipo indicado:

a) $\dfrac{z}{z^2 - 5z + 6}$ y $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ en potencias de z

b) $\dfrac{2z+3}{z+1}$ y $\dfrac{2z+3}{(z+1)^2}$ en potencias de $z - 1$

16) Calcule el radio de convergencia y la suma de: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(z - 2\pi i)^n}{n!}$.

17) Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ¿qué representa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n$ en términos de f?

18) ¿Para qué valores de z convergen las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$? **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$ **d)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ **e)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$?

19) Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^z}$ para $z \in \mathbb{C}$.

a) Demuestre que la serie converge si $\operatorname{Re} z > 1$.

b) Demuestre que si a es un número real con $a > 1$ entonces la serie converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$.

Nota: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^z}$ es la función Zeta de Riemann.

20)* Supongamos que la serie de potencias $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tiene radio de convergencia $R = 1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$. Denotemos

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{y} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

a) Demuestre que $s_n(z) = (1-z)\sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n$ y concluya que $f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$

b) Demuestre que $f(z) \to 0$ cuando z se aproxima a 1 de tal forma que $|1-z|/(1-|z|)$ está acotado.

21)* Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $z \in \mathbb{D}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $1 - |z|^k \leq k(1-|z|)$.

b) Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos tal que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sup_{k\geq n}|a_k| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n} k|a_k| = 0.$$

22)* Sea f holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$, con desarrollo de Taylor alrededor del origen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Denotemos por s_n la suma parcial $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

a) Pruebe que si $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$|f(z) - s_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||1-z^k| + \sup_{k\geq n}|a_k|\frac{1}{1-|z|}.$$

b) Deduzca que si $z_n = 1 - \frac{1}{n}$, entonces

$$|f(z_n) - s_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |a_k|k\} + n\sup_{k\geq n}|a_k|$$

c) Concluya finalmente que si $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ y si el límite

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

existe y vale, digamos, S, entonces

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Sugerencia: Use el ejercicio anterior.