Variable Compleja I, Curso 2014-15

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 1 de problemas

1) Realice las operaciones indicadas:

a) $\frac{1}{i}+\frac{1}{1+i}$ **b)** $\frac{2}{(1-3i)^2}$ **c)** $(1+i\sqrt{3})^3$ **d)** $(\overline{1-i})^2+\overline{2+i}$.

2) Calcule los valores de

a) $\sum_{k=1}^{2015} i^k$ **b)** $(1+i)^n+(1-i)^n$ **c)** $(\cos\frac{\pi}{12}+i\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12})^{20}$ **d)** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2014}$

3) Sea $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Demuestre que $|x|+|y|\le\sqrt{2}|z|$, y que sólo hay igualdad si $|x|=|y|$.
Ayuda: Si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $2ab\le a^2+b^2$ (con igualdad sólo si $a=b$).

4) Compruebe la identidad $|z\overline{w}+1|^2+|z-w|^2=(1+|z|^2)(1+|w|^2)$, donde z, $w\in\mathbb{C}$.

5) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $|z|=1$, entonces para todos $a,b\in\mathbb{C}$ con $\overline{b}z+\overline{a}\neq 0$ se cumple $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$.

b) Si $|a|<1$, entonces $|z|<1$ es equivalente a $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$.

6) Usando la fórmula de A. de Moivre, demuestre que:

a) $\mathrm{sen}(3x)=3\,\mathrm{sen}\,x-4\,\mathrm{sen}^3\,x$, para todo $x\in\mathbb{R}$, .

b) Para todo $n\in\mathbb{N}$ par, la función $\cos(n\varphi)$ es un polinomio de grado n de $\cos\varphi$.

7) Demuestre que $\left(\dfrac{1+i\,\tan\theta}{1-i\,\tan\theta}\right)^n=\dfrac{1+i\,\tan(n\theta)}{1-i\,\tan(n\theta)}$, para cualquier $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$.

8) Sin realizar cálculo alguno, razónese que no es posible que alguno de los valores de $\sqrt[1928]{1+i}$ sea $\dfrac{1-i}{2}$.

9) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $z\neq 1$ entonces $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

b) Si $\omega\neq 1$ es una raíz n-ésima de la unidad entonces

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=0,$$

y

$$1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{n}{\omega-1}.$$

c) Si $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right),$$

y

$$\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}2\theta+\cdots+\operatorname{sen}n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Ayuda: Use el apartado a) con $z=e^{i\theta}$.

10) Calcule todos los valores de

a) $(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{1/3}$ **b)** $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ **c)** $\sqrt[4]{1-i}$ **d)** $(\sqrt{-i})^{1/3}$

11) En este ejercicio, consideraremos sólo el *valor principal de la raíz cuadrada*, definido como $\sqrt[(p)]{z} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$ cuando $z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ con $-\pi<\theta\leq\pi$. Claramente, $(\sqrt[(p)]{z})^2 = z$.

a) Demuestre que las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2+bz+c=0$, con $a\neq 0$, son

$$z=\frac{-b\pm\sqrt[(p)]{b^2-4ac}}{2a}.$$

b) Calcule $\sqrt[(p)]{(\sqrt[(p)]{i})^5}$ y $\sqrt[(p)]{1+\sqrt[(p)]{i}}$.

12) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $(z+1)^4+i=0$; **b)** $\operatorname{Re}(z^2+5)=0$; **c)** $\operatorname{Re}(z+5)=\operatorname{Im}(z-i)$.

13) a) Demuestre que si w es una solución de $z^n=\mu$ (con $\mu\in\mathbb{C}$ fijo), entonces todas las soluciones son $w\omega_0, w\omega_1, w\omega_2, \ldots, w\omega_{n-1},$ donde $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}$, son las raíces n-ésimas de la unidad.

b) Encuentre razonadamente las soluciones de $z^6-8=0$.

14) ¿Cuando son colineales tres puntos z_1, z_2, z_3, distintos dos a dos? Escríbase una condición analítica sencilla.

15) a) Compruebe que la ecuación $\operatorname{Re}(az+b)=0$, con $a,b\in\mathbb{C}, a\neq 0$, define una recta en el plano y que, recíprocamente, cada recta viene descrita por una ecuación de este tipo.

b) Encuentre los números a, b para que la recta pase por dos puntos dados z_1, $z_2\in\mathbb{C}$.

c) Demuestre que las rectas determinadas por las ecuaciones $\operatorname{Re}(az+b)=0$ y $\operatorname{Re}(cz+d)=0$, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $\operatorname{Re}(a\bar{c})=0$.

d) Demuestre que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados z_1 y z_2, puede

escribirse en la forma
$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

16) Describa el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

a) $|z-2|-|z+2|>3$; **b)** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; **c)** $|2z| > |1+z^2|$.

17) Determine las ecuaciones complejas:

a) de la parábola con foco i y directriz $\operatorname{Im} z = -1$.

b) de la elipse con focos ± 1 que pasa por i.

c) de la hipérbola con focos ± 1 que pasa por $1+i$.

18) Esboce el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = 0$; **b)** $|z^2-4z+4| = 4$; **c)** $|z^2-2z-1| = 1$.

19) a) Sea $a \in \mathbb{C}$ un número fijo. Encuentre el máximo de $|z^{12}-a|$ cuando z es cualquier número complejo tal que $|z| \leq 1$.

b) Halle razonadamente el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto de números reales:
$$\left\{ \operatorname{Re}(iz^4+1) : \, |z| < \sqrt{2} \right\}.$$

20) Describa geométricamente el conjunto de los puntos $w \in \mathbb{C}$ que se escriben en la forma $w = iz^2+1$, para $z = x+iy$ con $x>0$, $y>0$, $x^2+y^2<1$.

21) Demuestre que, dados $a, c \in \mathbb{C}$, la condición necesaria y suficiente para que exista $z \in \mathbb{C}$ que verifique $|z+a|+|z-a| = 2|c|$ es que sea $|a| \leq |c|$.
Ayuda: Si $\lambda > 0$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+a|+|z-a| = 2\lambda\}$ es una elipse si $\lambda > |a|$, un segmento si $\lambda = |a|$ y el conjunto vacío si $\lambda < |a|$.

22)* He aquí algunas interpretaciones geométricas de ciertas operaciones con números complejos.

a) Si $z = x+iy \in \mathbb{C}$, sea $\alpha(z)$ el vector de tres dimensiones $(x, y, 0)$. Verifique que para cada $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple $\alpha(z)\cdot\alpha(w) = \operatorname{Re}(z\bar{w})$ y $\alpha(z)\times\alpha(w) = (0, 0, \operatorname{Im}(\bar{z}w))$.

b) Si $0, z, w$ son los vértices de un triángulo T, compruebe que $\operatorname{Area}(T) = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(z\bar{w})|$.

c) Si $z_1, z_2, \ldots z_n$ son los vértices de un polígono P que contiene a 0 en su interior, demuestre que $\operatorname{Area}(P) = \frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_{j+1}\right)\right|$, donde se toma $z_{n+1} = z_1$.

23)* Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que $\{z_1, z_2, z_3\}$ sea el conjunto de los vértices de un triángulo equilátero es que
$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Ayuda: Considere el triángulo $\{z_2, z_3, z_1\}$.