Variable Compleja I $\qquad$ 3^{o} **de Matemáticas / 4^{o} de Doble Titulación**

Examen Parcial, 2014-15

SOLUCIONES

Se pide justificar todas las respuestas de manera breve pero clara y detallada, nombrando los teoremas y las fórmulas que se usen.

1. $[5 = 2,5 + 2,5$ **puntos**$]$

(a) Calcule razonadamente el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n .$$

(b) Desarrolle la función

$$f(z) = \frac{z}{2-z}$$

en serie de potencias de $z-1$, mostrando los detalles del trabajo.

<u>Solución.</u> (a) El coeficiente de la serie es $a_n = \binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, con lo cual podemos aplicar la fórmula de d'Alembert (la del cociente) para el radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 .$$

Por lo tanto, $R = \frac{1}{4}$.

(b) Según la fórmula para la suma de una serie geométrica de potencias, cuando $|z-1| < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{1-(1-z)} = z \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = ((z-1)+1) \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n . \end{aligned}$$

Es decir, los coeficientes de Taylor son $a_0 = 1$ y $a_n = 2$, para todo $n \geq 1$.

Alternativamente, calculamos

$$f'(z) = 2 \cdot (2-z)^{-2} , \quad f''(z) = 2 \cdot 2 \cdot (2-z)^{-3} , \quad f'''(z) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2-z)^{-4} ,$$

y, por inducción, $f^{(n)}(z) = 2n! \cdot (2-z)^{-(n+1)}$, para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, $a_0 = f(1) = 1$ y $a_n = f^{(n)}(1)/n! = 2$, para $n \geq 1$. $\blacksquare$

2. [$5 = 2,5 + 2,5$ **puntos**]

Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ y γ la circunferencia unidad (centrada en el origen) con orientación positiva. Supongamos que f es una función holomorfa en el disco D y que cumple la igualdad

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Calcule razonadamente el valor de $f'\left(\frac{1}{n+1}\right)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) Demuestre que la función f es constante en el disco D. Justifique la respuesta.

<u>Solución.</u> (a) Usando álgebra elemental, la condición

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = \frac{1}{(n+1)^2}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{n+1})^2}\, dz$$

implica que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{n+1})^2}\, dz = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Se cumplen las condiciones para aplicar la fórmula integral de Cauchy para la derivada:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = f'(a)\,, \qquad a \in \mathbb{D}\,.$$

Podemos aplicar la fórmula para $a = \frac{1}{n+1}$, $n = 1,\ 2, \ldots$ (puntos en el disco unidad). Esto significa que

$$f'\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \blacksquare$$

(b) Los puntos $\frac{1}{n+1}$ tienen módulo menor que 1 y, por tanto, están todos en D y son distintos dos a dos. Convergen al punto 0 que es distinto de todos ellos y también está en el disco D. Puesto que f' es holomorfa allí, se sigue que $f' \equiv 0$ en D por el Principio de los ceros aislados (Teorema de la unicidad).

Finalmente, f es holomorfa en el dominio D y su derivada es idénticamente nula allí. Por un teorema visto en clase (como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann), $f \equiv const$ en D. $\blacksquare$