Variable Compleja I $\quad$ 3º **de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

EXAMEN FINAL DE MAYO, 2014-15

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

D.N.I. ______________ FIRMA ______________________

IMPORTANTE: Se pide justificar todas las respuestas de manera clara y detallada, nombrando los teoremas y las fórmulas que se usen y mostrando el trabajo. Cada problema puntúa $2,5$.

1. (a) Desarrolle la función
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$
en serie de Laurent alrededor del punto $z = 1$ y calcule su residuo en el mismo punto.

(b) Describa el conjunto de todos los puntos z en el plano tales que $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z+1} = 0$.

(c) Determine el número de ceros de la función $f(z) = e^z - 3z^4$ en el disco unidad, $\mathbb{D}$.

2. Usando métodos de variable compleja, calcule la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2}\,.$$

3. Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva del dominio $\Omega = \{z : \ |z-i| < 1\,, |z-\frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$ sobre el semiplano superior $\mathbb{H} = \{w : \ \operatorname{Im} w > 0\}$, razonando la respuesta.

4. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y que satisface la desigualdad

$$|f(z)| \leq \frac{|z|^{2/3}}{|z-1|^{1/2}}$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Demuestre que $f \equiv 0$.

Sugerencia. Considere la función $g(z) = (z-1)f(z)$ y demuestre que es un polinomio.