Variable Compleja I **3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

EXAMEN FINAL DE MAYO, 2014-15

SOLUCIONES

1. (a) Desarrolle la función
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$
en serie de Laurent alrededor del punto $z = 1$ y calcule su residuo en el mismo punto.

(b) Describa el conjunto de todos los puntos z en el plano tales que $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z+1} = 0$.

(c) Determine el número de ceros de la función $f(z) = e^z - 3z^4$ en el disco unidad, $\mathbb{D}$.

SOLUCIÓN. (a) Usando el desarrollo de la función exponencial, obtenemos
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = e\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{z-1}{6} + \dots$$
Como sabemos, $\operatorname{Res}(f;1)$ es igual al coeficiente al lado de la potencia $(z-1)^{-1}$, que es $= e$.

(b) Escribiendo $z = x + yi$ con x, $y \in \mathbb{R}$ y manipulando la fracción de manera habitual (multiplicando y dividiendo por el número conjugado de $z+1$, obtenemos
$$\operatorname{Re}\frac{1}{z+1} = \operatorname{Re}\frac{1}{x+1+yi} = \operatorname{Re}\frac{x+1-yi}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\,.$$
Por lo tanto, nuestro conjunto queda descrito por las condiciones
$$x+1 = 0\,, \qquad z+1 \neq 0\,,$$
es decir,
$$\operatorname{Re} z = -1\,, \qquad z \neq -1\,,$$
Geométricamente, el conjunto representa en el plano la recta vertical $x = -1$ menos el punto $(-1, 0)$.

(c) La función entera $3z^4$ tiene un cero cuádruple en el origen y, por tanto, tiene en el disco unidad 4 ceros, contando las multiplicidades. El la frontera del disco unidad: $|z| = 1$ (la circunferencia unidad, que es una curva C^1, simple y cerrada) se cumple la desigualdad estricta
$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \le e^1 = e < 3 = |3z^4|$$
para las funciones holomorfas $3z^4$ y e^z. Por tanto, según el Teorema de Rouché, la función $f(z) = e^z - 3z^4$ tiene en el disco unidad el mismo número de ceros que la función $3z^4$, es decir, cuatro ceros. ∎

2. Usando métodos de variable compleja, calcule la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2}\,.$$

<u>SOLUCIÓN.</u> Sea $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2}$. Al igual que en algunos problemas resueltos ya vistos antes, vamos a convertir I en una integral a lo largo de la circunferencia unidad. Podemos parametrizar la circunferencia $\mathbb{T}$ de la siguiente manera:

$$z = e^{it}\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Entonces para cada $z \in \mathbb{T}$ obtenemos

$$z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{(5+4\cos t)^2} = \frac{1}{\left(5+2(z+\frac{1}{z})^2\right)} = \frac{z^2}{(2z^2+5z+2)^2}\,.$$

Observemos que $dz = ie^{it}\,dt = iz\,dt$ y, por tanto, $dt = dz/(iz)$. Todo esto nos permite escribir

$$I = \frac{1}{i}\int_{\mathbb{T}} \frac{z\,dz}{(2z^2+5z+2)^2}\,.$$

Para evaluar I, tenemos que determinar las singularidades aisladas de la función

$$f(z) = \frac{z}{(2z^2+5z+2)^2}$$

dentro de la curva $\mathbb{T}$ que es simple, cerrada y C^1. Es inmediato que los ceros del denominador son $z=-2$ y $z=-1/2$ y que, por tanto, ambos son polos dobles de f, debido a la factorización

$$f(z) = \frac{z}{4(z+2)^2(z+\frac{1}{2})^2}$$

Sólo uno de los polos, a saber, $z=-1/2$ está dentro de $\mathbb{T}$. Según el Teorema de los residuos, se sigue que

$$I = \frac{1}{i}\int_{\mathbb{T}} \frac{z\,dz}{(2z^2+5z+2)^2} = \frac{1}{i}2\pi i \mathrm{Res}\,(f;-\frac{1}{2}) = 2\pi \mathrm{Res}\,(f;-\frac{1}{2})\,.$$

El residuo correspondiente se calcula según la fórmula vista en clase:

$$\mathrm{Res}\,(f;-\frac{1}{2}) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \left((z+\frac{1}{2})^2 f(z)\right)' = \left(\frac{z}{4(z+2)^2}\right)'|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{2-z}{4(z+2)^3}|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{27}\,.$$

Finalmente,

$$I = 2\pi\cdot\frac{5}{27} = \frac{10\pi}{27}\,.$$

■

3. Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva del dominio $\Omega = \{z : \; |z-i| < 1 \, , |z-\frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$ sobre el semiplano superior $\mathbb{H} = \{w : \; \operatorname{Im} w > 0\}$, razonando la respuesta.

<u>Solución.</u> Puesto que no especificamos la imagen de ningún punto concreto, existirán infinitas transformaciones con la propiedad indicada. Indicaremos la construcción de una de ellas; existen muchas otras posibilidades, obviamente.

El dominio Ω está delimitado por dos círculos: uno exterior de centro i y radio 1 (y, por tanto, con el intervalo $[0, 2i]$ del eje imaginario como diámetro) y otro interior de centro $i/2$ y radio $1/2$ (y, por tanto, con el intervalo $[0, i]$ del eje imaginario como diámetro). El círculo interior es tangencial al exterior en el origen y, por tanto, sus tangentes allí forman un ángulo de 0^{o}. Una transformación de Möbius elegida de forma apropiada transformará ambas circunferencias en rectas paralelas.

Para encontrar una transformación del tipo indicado, es conveniente transformar el origen en el punto ∞, de manera que podemos elegir una que tenga la forma

$$S(z) = \frac{az+b}{z}\,, \qquad a \neq 0\,.$$

Nos conviene transformar el punto i en el origen y que una de las rectas sea el eje real, así que vamos a elegir $S(z) = \frac{1+iz}{z}$. Esta transformación de Möbius cumple

$$S(0) = \infty\,, \quad S(i) = 0\,, \quad S(2i) = \frac{i}{2}$$

y transforma el eje imaginario (más el punto en el infinito) en sí mismo: en efecto, si $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$ entonces

$$S(iy) = \frac{1-y}{iy} = \frac{y-1}{y} i\,.$$

Las dos circunferencias consideradas son perpendiculares al eje imaginario. Por tanto, debido a la propiedad conforme, sus imágenes por S son también ortogonales al eje imaginario (y pasan por el ∞); por tanto, son rectas horizontales. Una pasa por el origen y la otra por el punto $i/2$. Se sigue que S lleva la circunferencia interior $\{z : \; |z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}\}$ en el eje real (la recta horizontal que pasa por $S(i) = 0$) y la circunferencia exterior $\{z : \; |z-i| = 1\}$ en la recta $\{z : \; \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\}$ (la recta horizontal que pasa por $S(2i) = \frac{i}{2}$).

Multiplicando S por 2π, obtenemos la transformación de Möbius (biyectiva) $T(z) = 2\pi \frac{1+iz}{z}$ que transforma el círculo interior en el eje real y el exterior en la recta $\{z : \; \operatorname{Im} z = \pi\}$. Basta comprobar que un punto del dominio Ω, por ejemplo, $z = (3i)/2$ se transforma por T en un punto entre estas dos rectas (o argumentar con la orientación de la frontera) para concluir que T transforma el dominio Ω en la banda horizontal

$$\{z : \; 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

que tiene anchura π. Como ya hemos visto en clase, la función exponencial $f(z) = e^z$ es biyectiva en esa banda y la transforma en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{w : \; 0 < \operatorname{Arg} z < \pi\}$. Finalmente, la composición $f \circ T = e^T$ transforma Ω en $\mathbb{H}$ de forma biyectiva. ■

4. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y que satisface la desigualdad

$$|f(z)| \leq \frac{|z|^{2/3}}{|z-1|^{1/2}}$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Demuestre que $f \equiv 0$.

<u>SOLUCIÓN.</u> Como no sabemos de entrada que f es entera, no podemos aplicar ningún teorema referente a las funciones enteras visto en clase (teorema de Liouville, estimaciones de Cauchy) y, por tanto, hay que dar muchos pasos pequeños e "hilar muy fino" para ver que se cumple esa condición y finalmente obtener la conclusión deseada.

Consideremos la función $g(z) = (z-1)f(z)$, que es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y, por tanto, tiene una singularidad aislada en $z = 1$. Es fundamental demostrar primero que dicha singularidad es evitable, lo cual nos permitirá extender g hasta una función entera. Según la hipótesis del problema,

$$|g(z)| = |z-1| \cdot |f(z)| \leq |z|^{2/3}|z-1|^{1/2}, \qquad \forall z \neq 1 .$$

Puesto que $|z|^{2/3}|z-1|^{1/2} \to 0$ cuando $z \to 1$, se sigue que g tiene una singularidad evitable en $z = 1$ y que podemos extender la función para que sea entera, definiendo $g(1) = 0$.

Nuestro siguiente objetivo es ver que g cumple cierta desigualdad para los valores grandes de $|z|$ que nos permitirá aplicar las estimaciones de Cauchy (una generalización del teorema de Liouville vista en clase). Cuando $|z| \geq 1$, la desigualdad triangular implica

$$|z-1| \leq |z| + 1 \leq 2|z|$$

y, por tanto,

$$|g(z)| \leq |z|^{2/3}|z-1|^{1/2} \leq |z|^{2/3}2^{1/2}|z|^{1/2} = \sqrt{2}|z|^{7/6}, \qquad \text{cuando} \quad |z| \geq 1 .$$

Dado que g es una función entera que cumple esta desigualdad, según las estimaciones de Cauchy se sigue que g es un polinomio de grado, como mucho, $[7/6] = 1$, es decir,

$$g(z) = (z-1)f(z) = Az + B, \qquad A, B \in \mathbb{C} .$$

Sustityuendo $z = 0$ en la condición

$$|f(z)| \leq \frac{|z|^{2/3}}{|z-1|^{1/2}},$$

obtenemos $|f(0)| \leq 0$ y, por tanto, $f(0) = 0$; es decir, $0 = g(0) = B$.

Por otra parte, de la condición adicional $g(1) = 0$ obtenemos $A = g(1) = 0$ y, por tanto,

$$(z-1)f(z) = 0, \qquad \text{cuando} \quad z \neq 1,$$

es decir, $f(z) = 0$ para todo $z \neq 1$.

Ya sabemos que f tiene una singularidad aislada en $z = 1$ y la línea anterior nos dice que cerca del punto $z = 1$ la función f está acotada (porque es nula); de hecho, tiene límite cero cuando $z \to 1$. Por el teorema de la singularidad evitable de Riemann visto en clase, se sigue que f tiene una singularidad evitable en $z = 1$ y, por tanto, es entera (tan sólo ahora lo podemos concluir - antes era imposible). Como es nula en todo el plano menos en $z = 1$ y allí tiene límite cero, se sigue finalmente que $f \equiv 0$. ■