Teorema de Cauchy

Sea Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, γ una curva cerrada C^1 a trozos con $\texttt{Traza}(\gamma) \subseteq \Omega$ y sea f una función holomorfa en Ω. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Esquema de la demostración

1) El resultado es cierto si $\gamma = bR$ el borde de un rectángulo R con $R \subseteq \Omega$.

2) Como consecuencia de lo anterior, si P es una poligonal en Ω con lados paralelos a los ejes que une dos puntos, entonces $\int_P f$ sólo depende de los extremos de la poligonal y de la orientación.

3) Fijamos un punto $a \in \Omega$ y para $z \in \Omega$ definimos

$$F(z) \overset{\text{def}}{=} \int_{P_{a,z}} f$$

donde $P_{a,z}$ es una poligonal con lados paralelos a los ejes que une a con z dentro de Ω. Por el apartado anterior esa función está bien definida (cualquier poligonal da el mismo resultado). Esa función cumple:

$$F'(z) = f(z), \forall z \in \Omega$$

4) Por último, si γ es una curva cerrada C^1 a trozos con $\texttt{Traza}(\gamma) \subset \Omega$ entonces:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma F' = F(\text{punto final}) - F(\text{punto inicial}) = 0 \text{ pues } \gamma \text{ es cerrada.}$$

Demostración de **1)** *Por reducción al absurdo.*

Supongamos que existe un rectángulo (cerrado) R contenido en Ω tal que $\int_{bR} f \neq 0$. Tomamos $a > 0$ tal que $|\int_{bR} f| \geq a$

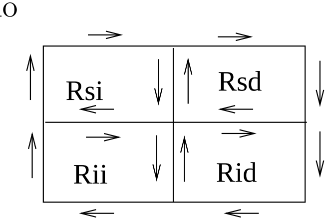
i) Existe una familia decreciente de rectángulos

$$R \equiv R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$$

tales que

- $long(bR_n) = \dfrac{long(bR)}{2^{n-1}}$
- $diam(R_n) = \dfrac{diam(R)}{2^{n-1}}$
- $|\int_{bR_n} f| \geq \dfrac{a}{4^{n-1}}$

Razón: Ponemos $R_1 = R$. Con los rectángulos $R^{ii}, R^{id}, R^{si}, R^{sd}$ como en la figura adjunta se tiene



$$\int_{bR_1} f = \int_{bR^{ii}} f + \int_{bR^{id}} f + \int_{bR^{si}} f + \int_{bR^{sd}} f$$

pues las integrales sobre la "cruz interna" se cancelan.

Como $|\int\limits_{bR} f| \geq a$ entonces al menos uno de los 4 rectángulos, que denotaremos por R_2, verifica $|\int\limits_{bR_2} f| \geq \frac{a}{4}$. Entonces R_2 cumple:

- $long(bR_2) = \frac{long(bR_1)}{2}$
- $diam(R_2) = \frac{diam(R_1)}{2}$
- $|\int_{bR_2} f| \geq \frac{|\int_{bR_1} f|}{4} \geq \frac{a}{4}$

Volvemos a aplicar el mismo argumento a R_2 para obtener un sub-rectángulo R_3 tal que

- $long(bR_3) = \frac{long(bR_2)}{2} = \frac{long(bR_1)}{2^2}$
- $diam(R_3) = \frac{diam(R_2)}{2} = \frac{diam(R_1)}{2^2}$
- $|\int_{bR_3} f| \geq \frac{|\int_{bR_2} f|}{4} \geq \frac{a}{4^2}$

Procediendo recursivamente obtenemos los rectángulos buscados $R_1 \supseteq R_2 \cdots \supseteq R_n \supseteq \cdots$

ii) $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} R_n = \{w\}$ con $w \in \Omega$

Razón: Como los R_n's son compactos y decrecientes su intersección es no vacía. Como sus diámetros convergen a 0 su intersección es un conjunto con sólo un elemento.

iii) Como $f'(w)$ existe,

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z-w) + E(z)(z-w)$$

donde $|E(z)| \to 0$ cuando $z \to w$.

Razón: Definimos

$$E(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w) & \text{si } z \neq w \\ 0 & \text{si } z = w \end{cases}$$

$E(z)$ converge a 0 cuando $z \to w$ por la definición de la derivada.

iv) $\int_{bR_n} f(z)dz = \int_{bR_n} E(z)(z-w)dz$

Razón: Para cualquier curva cerrada C se cumple que $\int_C (\alpha + \beta z)dz = 0$ pues $\alpha + \beta z$ es una derivada: la de $\alpha z + \beta \frac{z^2}{2}$.

Por otro lado, $f(z) = \alpha + \beta z + E(z)(z-w)$ con $\alpha = f(w) - f'(w)w$ y $\beta = f'(w)$ de donde se deduce la igualdad.

v) Dado $\epsilon > 0$ existe un n_ϵ tal que si $n \geq n_\epsilon$ entonces $|\int_{bR_n} f(z)dz| \leq \epsilon \, diam(R_n) \, long(bR_n)$

Razón: Como $|E(z)| \to 0$ cuando $z \to w$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|E(z)| < \epsilon$ si $|z-w| < \delta$ (también en $z = w$).

Por otro lado si $z \in \texttt{Traza}(bR_n)$ entonces, puesto que también $w \in \texttt{Traza}(bR_n)$ entonces $|z-w| \leq diam(R_n)$.

Como $diam(R_n) \to 0$ podemos elegir n_ϵ tal que $diam(R_n) < \epsilon$ si $n \geq n_\epsilon$. Para esos n's se tiene:

$$\begin{aligned}\left|\int_{bR_n} f(z)dz\right| &= \left|\int_{bR_n} E(z)(z-w)dz\right| \leq \int_{bR_n} |E(z)||z-w||dz| \\ &\leq \int_{bR_n} \epsilon\, diam(R_n)\, |dz| = \epsilon\, diam(R_n) \int_{bR_n} |dz| = \epsilon\, diam(R_n)\, long(bR_n)\end{aligned}$$

vi) Si tomamos ϵ tal que $\epsilon\, diam(R)\, long(bR) < a$ y cualquier $n \geq n_\epsilon$ llegamos a un contradicción.

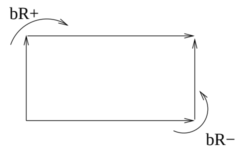
Razón: Sea ϵ como en el enunciado. Por el apartado **i)** y el anterior, si $n \geq n_\epsilon$ se tiene

$$\frac{a}{4^{n-1}} \leq \left|\int_{bR_n} f(z)dz\right| \leq \epsilon\, diam(R_n)\, long(bR_n) = \epsilon \frac{diam(R)\, long(bR)}{4^{n-1}}$$

de donde se deduce que $a < \epsilon\, diam(R)\, long(bR)$ contradiciendo la hipótesis.

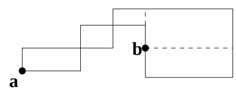
Demostración de **2)**

i) $\int_{bR} f(z)dz = 0$ es equivalente a decir que $\int_{bR^+} f(z)dz = \int_{bR_-} f(z)dz$, con bR^+, bR^- son como en la figura.



Razón: $bR = bR^+ - bR^-$

ii) Sean $P_{a,b}$ y $P'_{a,b}$ poligonales en Ω con lados paralelos a los ejes que unen a con b. Entonces $\int_{P_{a,b}} f = \int_{P'_{a,b}} f$.



Razón: al superponer las dos poligonales se obtienen rectángulos a los que se les puede aplicar el apartado anterior. Ver la figura adjunta.

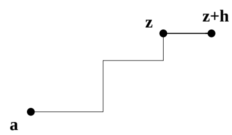
Demostración de **3)**

i) Basta demostrar que F_x, F_y existen y que $F_x(z) = f(z)$ y $F_y(z) = -if(z)$.

Razón: En las condiciones del enunciado F_x, F_y existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω. Como consecuencia $F'(z)$ existe y es igual a $F_x(z)$, es decir $F'(z) = f(z)$.

ii) $F_x(z) = f(z)$.

Razón: Sea $P_{a,z}$ una poligonal en Ω con lados paralelos a los ejes que une a con z y sea $P_{a,z+h} = P_{a,z} + [z, z+h]$, donde $[z, z+h]$ es el segmento que une z con $z+h$, h real.



$$F(z+h) = \int_{P_{a,z+h}} f = \int_{P_{a,z}} f + \int_{[z,z+h]} f = F(z) + \int_{[z,z+h]} f$$

Además, una parametrización $\alpha(t)$ de $[z, z+h]$ está dada por $\alpha(t) = z + th$ con $0 \leq t \leq 1$, con lo que

$$\int_{[z,z+h]} f = \int_0^1 f(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_0^1 f(z+th)hdt = h\int_0^1 f(z+th)dt$$

Entonces $\dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt \to f(z)$ cuando $h \to 0$ como ya vimos en clase. Por tanto F_x existe y es $f(z)$.

iii) $F_y(z) = -if(z)$ se demuestra de forma similar.

Demostración de **4)** No necesita comentarios.