Topología, UAM 2018-19 **3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL, 13/12/2018

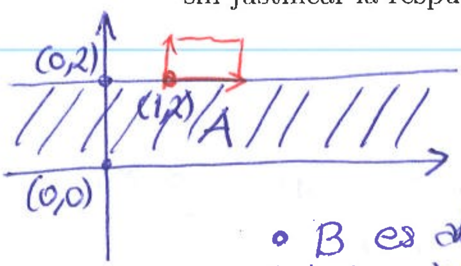
APELLIDOS, NOMBRE Coordinador INIC. APELLIDO ______

D.N.I. ______ GRUPO ______ FIRMA ______

1. [2,5 **puntos**] Consideremos el espacio topológico $X = \mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey. Representa gráficamente los siguientes conjuntos:

$$A = \mathbb{R} \times [0, 2], \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$$

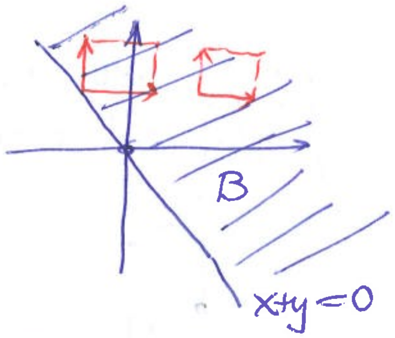
y decide si (en la topología producto de $X \times X$) son abiertos, cerrados, ambas cosas o ninguna, sin justificar la respuesta.



• A NO es abierto: p.ej., el punto (1,2) no es interior, SÍ es cerrado ya que es cerrado en $\mathcal{T}_{usual} \subseteq \mathcal{T}_{[)} \times \mathcal{T}_{[)}$.

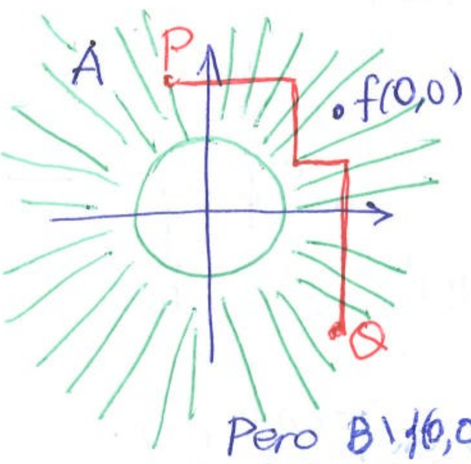
• B es abierto p.q. cada punto de B es interior, incluidos los de la recta $x+y=0$.

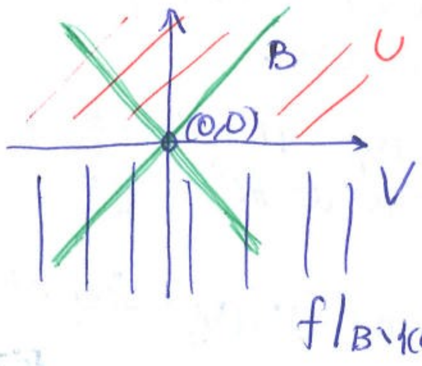
B es cerrado por la misma razón que A (es cerrado en $\mathcal{T}_{usual}$ p.q. para $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x+y$ (continua): $B = h^{-1}([0,+\infty))$.



2. [2,5 **puntos**] Razona si son homeomorfos los siguientes subconjuntos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{usual}})$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}.$$





No lo son. Si existiese un homeomorfismo $f: B \to A$, por un ejercicio visto en clase, también lo sería $f|_{B \setminus \{(0,0)\}} : B \setminus \{(0,0)\} \to A \setminus \{f(0,0)\}$.

Pero $B \setminus \{(0,0)\}$ no es conexo, p.ej.: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cap B$ y $V = \{(x,y) : y < 0\} \cap B$ forman una separación de $B \setminus \{(0,0)\}$ (por abiertos de $B \setminus \{(0,0)\}$ disjuntos y no triviales), mientras que $A \setminus \{f(0,0)\}$ es conexo porque es conexo por caminos (cada dos puntos $P, Q \in A \setminus \{f(0,0)\}$ pueden unirse mediante una línea poligonal contenida en $A \setminus \{f(0,0)\}$, incluso con todos los lados horizontales o verticales).

3. [2,5 **puntos**] Decide razonadamente si el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es compacto en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.

Hemos probado en clase que todo $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto con $\mathcal{T}_{cofin}$.
Aplicamos el mismo razonamiento a $A = \mathbb{N}$:
Sea $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ un recubrimiento de $\mathbb{N}$ por abiertos: $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, $G_\alpha \in \mathcal{T}_{cofin}$, $\forall \alpha \in I$. Fijemos un $\beta \in I$ cualquiera (t.q. $G_\beta \neq \emptyset$). Entonces $\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ t.q. $G_\beta = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists \alpha_k \in I$ tal que $x_k \in G_{\alpha_k}$ y, por tanto, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}\right) \cup G_\beta$. Esto significa que $\{G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}, G_\beta\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathbb{N}$.

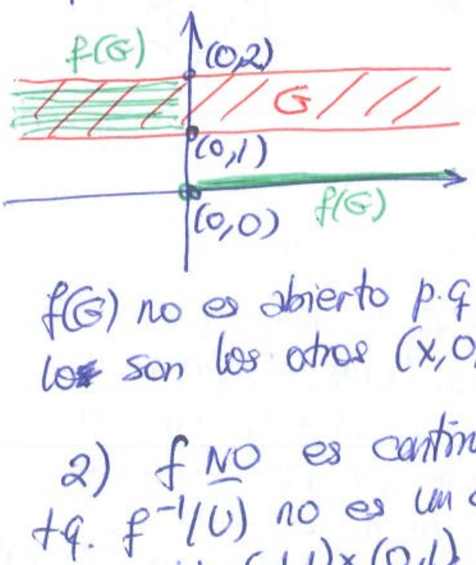
$\therefore$ $\mathbb{N}$ es compacto en $\mathcal{T}_{cofin}$.

4. [2,5 **puntos**] Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue:

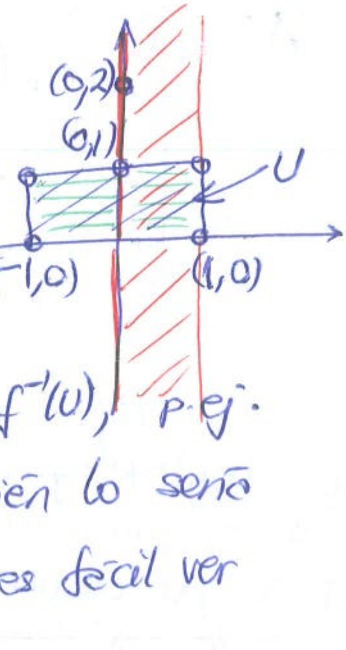
$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } x < 0\,, \\ (x, 0), & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Decide razonadamente: 1) si f es una aplicación abierta, 2) si es continua.

(f fija todos los puntos del semiplano izquierdo abierto y proyecta los puntos del semiplano derecho cerrado sobre el eje x.)



1) f NO es abierta p.q. existe un abierto G de $\mathbb{R}^2$ t.q. $f(G)$ no es un abierto de $\mathbb{R}^2$, p.ej., $G = \mathbb{R} \times (1,2)$.
$f(G) = ((-\infty, 0) \times (1,2)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\})$.
$f(G)$ no es abierto p.q. $(0,0)$ no es un punto interior de $f(G)$ -y tampoco lo son los otros $(x,0)$, con $x > 0$.



2) f NO es continua p.q. $\exists U$, abierto de $\mathbb{R}^2$, t.q. $f^{-1}(U)$ no es un abierto de $\mathbb{R}^2$, p.ej.
$U = (-1,1) \times (0,1)$;
$f^{-1}(U) = \{(x,y) : f(x,y) \in (-1,1) \times (0,1)\} \cup \{(x,y) : f(x,y) \in [0,1) \times (0,1)\}$
$= ((-1,0) \times (0,1)) \cup ([0,1) \times \mathbb{R})$.
Es obvio que $(0,2) \in f^{-1}(U)$ no es un punto interior de $f^{-1}(U)$, p.ej.

• Solución alternativa de 1): si f fuera continua, también lo sería la composición $\pi_2 \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\pi_2 \circ f)(x,y) = \begin{cases} y, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$ y es fácil ver que no lo es (como en Cálculo II, por sucesiones.)