Topología, UAM 2018-19 **3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

PRIMER EXAMEN PARCIAL, 31/10/2018: SOLUCIONES

1. En un espacio topológico arbitrario, para todo conjunto A se cumple la relación $\partial A = \partial(\operatorname{Int}(\overline{A}))$. ¿Cierto o falso? Justifica la respuesta, dando una prueba o un contrajemplo.

   Solución. FALSO.

   Ejemplo 1: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{usual}}$, $A = \mathbb{Q}$.

   $\partial A = \mathbb{R}$ (visto en clase), mientras que $\partial(\operatorname{Int}(\overline{A})) = \partial(\operatorname{Int}(\mathbb{R})) = \partial\mathbb{R} = \emptyset$.

   Ejemplo 2: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{usual}}$, $A = \{0\}$.

   $\partial A = \{0\}$, mientras que $\partial(\operatorname{Int}(\overline{A})) = \partial(\operatorname{Int}(\{0\})) = \partial\emptyset = \emptyset$.

2. Sea (X, d) un espacio métrico y $F \subset X$. Demuestra que F es cerrado si y sólo si

$$\{x : \ d(x, F) = 0\} \subset F\,.$$

   Solución. Puesto que siempre se cumple $F \subset \overline{F}$, la afirmación "F es cerrado" es equivalente a "$\overline{F} \subset F$". Por tanto, basta demostrar que $\{x : \ d(x, F) = 0\} = \overline{F}$, una propiedad vista en clase y cuya demostración puede darse como sigue.

   Si $x \in \overline{F}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$, luego $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in F$ tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Por tanto, $d(x, F) = \inf\{d(x, y) : \ y \in F\} = 0$.

   Recíprocamente, si $d(x, F) = \inf\{d(x, y) : \ y \in F\} = 0$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in F$ tal que $d_n = d(x, x_n) \searrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $d_n < \varepsilon$, luego $x_n \in \overline{B}(x, d_n) \subset B(x, \varepsilon)$ y $x_n \in F$, luego $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Esto significa que $x \in \overline{F}$.

3. Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{\rightarrow}$ que tiene como base $\mathcal{B} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Para el conjunto $A = \{0\}$, determina los conjuntos $\overline{A}$, A' y ∂A. No es necesario justificar la respuesta.

   Solución. Como ya se ha comentado en clase, la topología inducida por esta base no es otra que $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

   Es fácil ver que, por ejemplo, el punto $x = 0$ es un punto del cierre pero no un punto de acumulación de A. En efecto, si U es un entono abierto del punto 0, entonces $U = (a, +\infty)$ para cierto $a < 0$ y, por tanto,

$$U \cap A = \{0\} \neq \emptyset\,, \qquad (U \setminus \{0\}) \cap A = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset\,.$$

   El análisis es similar para los puntos $x < 0$ y $x > 0$, así como para la frontera.

   Respuestas:

$$\overline{A} = (-\infty, 0]\,, \qquad A' = (-\infty, 0)\,, \qquad \partial A = (-\infty, 0]\,.$$

4. Consideremos el espacio $X = \{p + \frac{1}{q} : p = 0, 1, 2, \dots; q = 2, 3, 4, \dots\}$ dotado con la topología del orden natural.

(a) Muestra dos abiertos que separen los puntos $1 + \frac{1}{3}$ y $1 + \frac{1}{2}$.

Solución. Obsérvese que no existe ningún punto $a \in X$ tal que $1 + \frac{1}{3} < a < 1 + \frac{1}{2}$ (¡dibujo!). Nos sirven, por tanto,

$$U = (\leftarrow, 1 + \frac{1}{2}) = \{x \in X : x < 1 + \frac{1}{2}\} = \{\dots, 0 + \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{3}, 0 + \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{3}\},$$

$$V = (1 + \frac{1}{3}, \rightarrow) = \{x \in X : x > 1 + \frac{1}{3}\} = \{1 + \frac{1}{2}, \dots, 2 + \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{2}, \dots\},$$

que son abiertos en X.

(b) Demuestra que X es un espacio de Hausdorff.

Solución. Esta prueba, esencialmente, se ha visto en clase para cualquier topología de orden. En lo que sigue, $\mathcal{V}(x)$ significa la colección de todos los entornos abiertos del punto x; obsérvese que esta notación no se utiliza de forma unánime en la literatura.

Sean x, $y \in X$ arbitrarios, $x \neq y$ y veamos que $\exists U \in \mathcal{V}(x)$, $V \in \mathcal{V}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Tenemos que o bien $x < y$ o bien $y < x$ y trataremos sólo el caso $x < y$, por ser el otro totalmente análogo. Hay que distinguir entre dos situaciones.

1. Si $\exists p \in X$ tal que $x < p < y$, podemos tomar $U = (\leftarrow, p)$, $V = (p, \rightarrow)$.

2. Si, como en el apartado anterior, no existe ningún $p \in X$ tal que $x < p < y$, entonces podemos elegir $U = (\leftarrow, y)$, $V = (x, \rightarrow)$.