Topología

Tercer curso de Matemáticas

*

2018

---

*Tipografiado con LaTeX

Esta páginas quieren recoger las notas de clase del curso de Topología del tercer año del grado de Matemáticas impartido en la Universidad Autónoma de Madrid durante el curso 2018/19. No son más que una versión preliminar en la que se puede haber deslizado, aparte de algunas erratas, algún que otro error. Se han incluido los enunciados de todos los resultados (lemas, proposiciones, teoremas) vistos en el curso pero pueden faltar todavía algunas demostraciones que se irán incluyendo de forma progresiva. El nombre del archivo pdf incluirá la fecha de la versión.

He tratado de mantener una notación consistente a lo largo del curso pero seguramente aparecen algunas diferencias de unos lugares a otros tanto en la notación propiamente dicha, como en la tipografía.

Se han intercalado algunos ejercicios no incluidos en las hojas, la mayor parte de ellos planteados en clase pero algunos añadidos al tipografiar las notas. También se incluye la solución de alguno de ellos.

En el curso se ha utilizado como texto el libro de Munkres y muchas demostraciones son similares a las que allí aparecen aunque algunas otras se han modificado o reescrito de forma diversa.

Patricio Cifuentes

Madrid, 18 de diciembre de 2018

1. Espacio topológico

1.1. Espacio métrico

La primera forma abstracta de las ideas sobre proximidad, convergencia, continuidad que generalizan los conceptos de $\mathbb{R}^n$ es la idea de «distancia».

1 Definición. Una *distancia* (o métrica) d en un conjunto X es una aplicación

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

que debe cumplir las siguientes propiedades

a. Positividad: $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \implies x = y$.

b. Simetría: $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$.

c. Desigualdad triangular: $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un par (X, d) formado por un conjunto X y una distancia d en él definida se denomina *espacio métrico*.
Una vez definida la distancia utilizamos el concepto de «bola» para indicar el conjunto de puntos más o menos próximo a un punto dado.

2 Definición. Se llama *bola abierta* de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

Se llama *bola cerrada* de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$\bar{B}(x, r) = \{x \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

3 Ejemplo. Como primer ejemplo tenemos el que da origen a la definición: la distancia euclídea de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

que en el caso de $n = 1$ se reduce a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, d_2(x, y) = |x - y|.$$

Sobre $\mathbb{R}^n$ también es interesante estudiar las distancias:

a. $d_1(x, y) = \sum_{i_1}^{n} |x_i - y_i|$

b. $d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

Estas distancias se relacionan con las llamadas «normas»: $|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$; $|x|_2 = \langle x, x\rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; $|x|_\infty = \sup_{i=1}^{n} |x_i|$. Conviene anotar, de cara al futuro, las desigualdades siguientes:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |x|_\infty \leq |x|_2 \leq |x|_1\,; \quad |x|_1 \leq n|x|_\infty\,; \quad |x|_2 \leq \sqrt{n}|x|_\infty\,; \quad |x|_1 \leq \sqrt{n}|x|_2\,.$$

La última de las desigualdades se puede demostrar utilizando la desigualdad de Cauchy – Schwarz.

Observación: $|x_1| + |x_2| + \cdots |x_n| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) \cdot (1, 1, \ldots, 1) \leq |x|_2 \cdot |(1, 1, \ldots, 1)|_2$.

4 Ejemplo. En el conjunto X de las funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ se definen las distancias:

a. $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

b. $d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$

c. $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Para ver que son distancias, la positividad y la simetría son triviales. La desigualdad triangular es fácil para d_∞ y para d_1. Para d_2 puede utilizarse la desigualdad de Cauchy– Schwarz:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

5 Ejemplo (Subespacio métrico)**.** Si (X, d) es un espacio métrico e Y es un subconjunto de X entonces la función distancia restringida al producto $Y \times Y$ tiene también las propiedades de una distancia (ejercicio) y (Y, d) es un nuevo espacio métrico.

Un subconjunto C de un espacio métrico permite clasificar los puntos del espacio en tres categorías: puntos interiores, puntos exteriores y puntos frontera. Es *interior* un punto $x \in \mathsf{C}$ para el que existe $r > 0$ que cumple $B(x, r) \subset \mathsf{C}$. Es *exterior* todo punto interior del complementario de C. Finalmente, los puntos que nos son ni interiores ni exteriores, se denominan puntos *frontera*. Obviamente, un punto frontera puede ser un punto de C o de su complementario.
Se llama punto de acumulación (a veces también punto límite) de un conjunto C a todo punto $x \in X$ tal que $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap (\mathsf{C} \setminus \{x\}) \neq \varnothing$.
Los puntos frontera que no son puntos de acumulación se llaman puntos aislados.
A veces se utiliza el término punto de adherencia para designar los puntos que son bien de acumulación, bien aislados. Obviamente, $x \in X$ es un punto de adherencia de C si $\forall r > 0$, se tiene que $B(x, r) \cap \mathsf{C} \neq \varnothing$ (compárese esta caracterización con la definición de punto de acumulación).

Subconjuntos abiertos. Subconjuntos cerrados

6 Definición. Dado un espacio métrico (X, d), se dice que un subconjunto $\mathsf{G} \subset X$ es *abierto* si todos sus puntos son interiores; se dice que un subconjunto $\mathsf{F} \subset X$ es *cerrado* si su complemetario F^c es abierto.

7 Ejemplos.

a. En cualquier (X, d) los subconjuntos X, $\varnothing$ son a la vez abiertos y cerrados.

b. Toda bola abierta es un subconjunto abierto: si $y \in B(x, r)$ sea s: $0 < s < d(x, y)$; entonces $B(y, s) \subset B(x, r)$, es decir, y es interior a $B(x, r)$.

$$\longrightarrow\ d(z,y) < s \implies d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < s + d(y,x) < r\ \longleftarrow$$

c. Toda bola cerrada es un subconjunto cerrado: si $y \notin \bar{B}(x, r)$, $d(x, y) > r$; sea $s = d(x, y) - r > 0$, entonces $B(y, s) \cap \bar{B}(x, r) = \varnothing$, es decir, si $d(z, y) < s$ entonces $d(x, z) > r$.

$$\longrightarrow\ d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - s > r\ \longleftarrow$$

d. Un subconjunto finito es siempre cerrado: si $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ y $x \notin F$ sea $r = \min\{d(x, x_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$, entonces $B(x, r) \cap F = \varnothing$ es decir, $B(x, r) \subset F^c$ por tanto, F^c es abierto.

Propiedades de abiertos y cerrados respecto de uniones e intersecciones.

8 Proposición.

a. *Si* $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, \ldots, \mathsf{G}_n$ *son abiertos de* (X, d) *entonces* $\cap_{i=1}^{n} \mathsf{G}_i$ *también es abierto.*

b. *Si* $\{\mathsf{G}_i \mid i \in I\}$ *es una colección de abiertos de* (X, d)*, entonces* $\cup_{i \in I} \mathsf{G}_i$ *también es abierto.*

9 Corolario.

a. *Si* $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots, \mathsf{F}_n$ *son cerrados de* (X, d) *entonces* $\cup_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i$ *también es cerrado.*

b. *Si* $\{\mathsf{F}_i \mid i \in I\}$ *es una colección de cerrados de* (X, d)*, entonces* $\cap_{i \in I} \mathsf{F}_i$ *también es cerrado.*

Observación: Es fácil ver con un contraejemplo (e. g., en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) que la intersección cualquiera de abiertos no tienen por qué ser un abierto (y, por tanto, la unión cualquiera de cerrados no tiene por qué ser cerrada).

Interior, cierre (o clausura), frontera

10 Definición. Interior de un subconjunto C en un espacio métrico (X, d):

$$\mathring{\mathsf{C}} = \operatorname{int} \mathsf{C} = \bigcup_{\substack{\mathsf{G} \text{ abierto} \\ \mathsf{G} \subset \mathsf{C}}} \mathsf{G}.$$

En esta unión siempre hay al menos un conjunto: $\varnothing$.
El interior de C es siempre un conjunto abierto: es el mayor abierto contenido en C.
El interior de C es el conjunto de todos los puntos interiores a C.

Observación: C abierto $\Leftrightarrow \mathring{C} = C$

11 Definición. Cierre (o clausura, también adherencia) de un conjunto C en un espacio métrico (X, d):

$$\overline{C} = \mathrm{cl}\, C = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ C \subset F}} F.$$

En esta intersección siempre hay al menos un conjunto: X.
El cierre de C siempre es cerrado: es el menor cerrado que contiene a C.
El cierre de C es el conjunto de puntos de adherencia de C.

Observación: C cerrado $\Leftrightarrow \overline{C} = C$.

12 Definición. Frontera de un subconjunto C de un espacio métrico (X, d):

$$\partial C = \mathrm{fr}\, C = \overline{C} \bigcap \overline{X \setminus C} = \overline{C} \setminus \mathring{C}.$$

La frontera de un conjunto C es el conjunto de sus puntos frontera.

13 Proposición. *Sean* $\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2, \dots, \mathsf{C}_n$ *subconjuntos de un espacio métrico* (X, d) *entonces*

a. $\overline{\bigcup_{k=1}^n \mathsf{C}_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{\mathsf{C}_k}$.

b. $\operatorname{int} \bigcap_{k=1}^n \mathsf{C}_k = \bigcap_{k=1}^n \mathring{\mathsf{C}}_k$.

Demostración.
a. $\cup_{k=1}^n \overline{\mathsf{C}}_k$ es cerrado y $\cup_{k=1}^n \mathsf{C}_k \subset \cup_{k=1}^n \overline{\mathsf{C}}_k$ por tanto, $\overline{\cup_{k=1}^n \mathsf{C}_k} \subset \cup_{k=1}^n \overline{\mathsf{C}}_k$.
b. Se puede demostrar pasando al complementario la anterior demostración o repitiendo el proceso de forma paralela para abiertos. □

Observaciones:

- Los resultados anteriores no son, en general, ciertos si se intercambian unión e intersección.
- Los resultados anteriores no son, en general, ciertos para colecciones infinitas.

Convergencia

Recuérdese que una sucesión en un conjunto cualquiera X es una aplicación $\mathbb{N} \to X$ que se denota como (x_n); donde $x_n \in X$ es la imagen del entero n.

14 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión (x_n) de puntos de X converge a $x \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$, tal que $\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon)$. Se escribirá $x_n \to x$ o $\lim x_n = x$.

En un espacio métrico, el límite, si existe, es único.[1]

15 Ejemplos.

a. *Convergencia uniforme.* En $((\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \sup)$ la sucesión (f_n) converge a f cuando $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_\varepsilon$ se tiene $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} < \varepsilon$; es decir $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Esto es, (f_n) converge uniformenente a f.

Recuérdese que la convergencia uniforme es más fuerte que la convergencia puntual; por ejemplo, si

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ -nx + 2 & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

la sucesión (f_n) converge puntualmente a *cero* sin embargo no tiene límite uniforme.

[1] Esta propiedad es consecuencia del hecho siguiente: en un espacio métrico (X, d) dados dos puntos distintos x_1, x_2 existe $r > 0$ tal que $B(x_1, r) \cap B(x_2, r) = \varnothing$. Esta propiedad se conoce como *propiedad de Hausdorff*.

b. Una sucesión en un espacio métrico discreto es convergente si y solamente si es finalmente constante[2].

Si (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos entonces $(y_k) = (x_{n_k})$ es una subsucesión de (x_n).
Si una sucesión (x_k) converge a un punto x entonces toda subsucesión suya también converge a x.

16 Proposición. *Sea* $C \subset X$. $x \in C'$ $\Leftrightarrow$ *existe una sucesión* (x_n) *en* C, *no finalmente constante, tal que* $x_n \to x$.

Demostración.
$(\Rightarrow)$
$(\Leftarrow)$ $\square$

17 Definición. Distancia de un punto $x \in X$ a un subconjunto C :

$$d(x, C) = \inf\{d(x, y) \mid y \in C\}.$$

Obviamente, si $x \in C$ entonces $d(x, C) = 0$, pero puede ocurrir que $x \notin C$ y sin embargo $d(x, C) = 0$. De hecho:

[2] Una sucesión es *finalmente constante* si es contante a partir de un índice.

18 Proposición. *Sea* C *un subconjunto de* X.

a. C *cerrado* $\Leftrightarrow \mathsf{C}' \subset \mathsf{C}$.

b. $\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{C} \cup \mathsf{C}'$.

c. $\overline{\mathsf{C}} = \{x \mid d(x, \mathsf{C})\} = 0$.

Sucesión de Cauchy (también, sucesión fundamental)

19 Definición. Se dice que una sucesión (x_n) es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall n, m \geq n_\varepsilon$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

20. *Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea x el límite de la sucesión,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x).$$

$\square$

Espacio métrico completo.

21 Definición. Un espacio métrico (X, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy es una sucesión convergente.

22. *Toda sucesión convergente e una sucesión de Cauchy*

Demostración. Si $(x_n) \to x$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m).$$

□

23 Definición. Se llama espacio métrico completo a un espacio métrico en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

24 Ejemplos.

- $(\mathbb{R}, |.|)$ es un espacio métrico completo.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo: la sucesión $x_0 = 3$, $x_1 = 3{,}1$, $x_2 = 3{,}14$, $x_3 = 3{,}141$, etc. donde el término x_n tiene correctas las n primeras cifras decimales por defecto del número π y las demás son cero, es una sucesión de Cauchy $(|x_n - n_{n+p}| \leq 10^{-n})$ de números racionales que no tiene límite (racional).

25. *Una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente es también convergente.*

26. *Los términos de una sucesión de Cauchy forman un subconjunto acotado.*

27 Proposición. *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo e* $Y \subset X$*, entonces* (Y, d) *es completo si y solamente si* Y *es un subconjunto cerrado de* X*.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Sea $y \in \overline{Y}$; existe (y_n) sucesión en Y que converge a y, por tanto (y_n) es una sucesión de Cauchy en X, y por tanto, también en Y, que es completo por tanto el límite está en Y.
($\Leftarrow$) Toda sucesión de Cauchy (y_n) de Y es también sucesión de Cauchy de X por tanto tiene límite y. Por ser Y cerrado, $y \in Y$. $\square$

Continuidad

El concepto de continuidad se extiende a funciones entre espacios métricos de la siguiente manera.

28 Definición. La aplicación (función) $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ es continua en el punto $x_1 \in X_1$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $\forall x \in X_1$ $x \in B_{d_1}(x_1, \delta) \implies f(x) \in B_{d_2}(f(x_1), \varepsilon)$.

La última impicación es equivalente a escribir

$$f\left(B_{d_1}(x_1, \delta)\right) \subset B_{d_2}(f(x_1), \varepsilon).$$

Por extensión, la función es continua (en todo X_1) si es continua en cada uno de sus puntos.
La continuidad se puede caracterizar de la siguiente forma:

29 Proposición. *La función $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ es continua si y solamente si para todo abierto G de X_2 el conjunto $f^{-1}(\mathsf{G})$ es un abierto de X_1.*

Demostración.
$(\Rightarrow)$ Es suficiente ver que todo $x \in f^{-1}(\mathsf{G})$ es interior. Dado que $f(x)$ es interior a G, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_2(f(x), \varepsilon) \subset \mathsf{G}$. Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(x', x)\delta$ entonces $f(x') \in B_2(f(x), \varepsilon) \subset \mathsf{G}$, por tanto $x' \in f^{-1}(\mathsf{G})$, en consecuencia $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(\mathsf{G})$.
$(\Leftarrow)$ Sea $x \in X_1$. Dado $\varepsilon > 0$, $B_2(f(x), \varepsilon)$ es un abierto de X_2 por tanto $f^{-1}(B_2(f(x), \varepsilon)$ es abierto de X_1 por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(B_2(f(x), \varepsilon))$ y por tanto $f(B_1(x, \delta) \subset B_2(f(x), \varepsilon)$. $\square$

30 Corolario. *$f : X_1 \to X_2$ es continua si y solamente si para todo cerrado F de X_2 se tiene que $f^{-1}(\mathsf{F})$ es cerrado de X_1.*

Demostración. Se utiliza la caracterización de funciones continuas de la proposición anterior.
$(\Rightarrow)$ Sea F cerrado de X_2. $\mathsf{F} = X_2 \setminus \mathsf{F}^c$, por tanto

$$f^{-1}(\mathsf{F}) = f^{-1}(X_2 \setminus \mathsf{F}^c) = X_1 \setminus f^{-1}(\mathsf{F}^c),$$

dado que F^c es abierto de X_2, $f^{-1}(F^c)$ es abierto de X_1, por tanto su complementario es cerrado.

($\Leftarrow$) La demostración es análoga, cambiando F cerrado por G abierto. $\square$

31 Ejemplo. Sea $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ el espacio métrico de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con la métrica de la convergencia uniforme. La aplicación $T : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$Tf = \int_0^1 f(x)dx$$

es continua:

si G es un abierto de $\mathbb{R}$, sea $f_0 \in T^{-1}(G)$ e $i_0 = \int_0^1 f_0(x)dx \in G$, entonces existe $s > 0$ tal que $(i_0 - s, i_0 + s) \subset G$. Si $f \in B(f_0, s)$, es decir si $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - f_0(x)| < s$ entonces, dado que $Tf = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (f(x) - f_0(x))dx + i_0$, se tiene que

$$|Tf - i_0| \leq \int_0^1 |f(x) - f_0(x)|dx \leq s\,;$$

es decir $Tf \in G$ y $f \in T^{-1}(G)$ por tanto f_0 es un punto interior de $T^{-1}(G)$ que será abierto.

32 Ejemplo. Si d es la métrica discreta de un conjunto X e (Y, δ) es un espacio métrico cualquiera entonces toda $f : X \to Y$ es continua.

La continuidad en un espacio métrico también se caracteriza por medio de sucesiones.

33 Proposición. *La función $f : X_1 \to X_2$ es continua si y solamente si para toda sucesión convergente (x_n) de X_1, la sucesión $(f(x_n))$ de X_2 también converge.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Sea $(x_n) \to x$. Por ser f continua en x, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(y, x) < \delta$ entonces $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$. Por ser la sucesión convergente, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_\delta$ entonces $d(x_n, x) < \delta$ por tanto $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$, es decir, $(f(x_n)) \to f(x)$.
($\Leftarrow$) Es suficiente ver que si F es cerrado de X_2 entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado (de X_1). Sea $x \in \operatorname{cl} f^{-1}(F)$, entonces existe una sucesión (x_n) en $f^{-1}(F)$ que converge a x, por tanto $(f(x_n))$ es una sucesión en F converge a $f(x)$ (efectivamente, converge, pero ¿por qué a $f(x)$?). Como F es cerrado, $f(x) \in F$, por tanto $x \in f^{-1}(F)$, es decir $\operatorname{cl} f^{-1}(F) \subset f^{-1}(F)$. $\square$

34 Ejemplo. En un espacio métrico (X, d) se fija un punto $x_0 \in X$ y se define la función $f : X \to \mathbb{R}$ por medio de $f(x) = d(x, x_0)$. La función f es continua ya que

$$\forall x, y \in X, \quad |f(x) - f(y)| \le d(x, y).$$

Ejercicio 1. En un espacio métrico (X, d) se fija un subconjunto no vacío C y se define la función $f : X \to \mathbb{R}$ por medio de $f(x) = \operatorname{dist}(x, \mathrm{C})$. Demuéstrese que es continua.

Continuidad uniforme

35 Definición. Se dice que una función $f : X_1 \to X_2$ entre dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2) es *uniformemente continua* si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x_1, y_1 \in X_1$, $d_1(x_1, y_1) < \delta$ implica $d_2(f(x_1), f(y_1)) < \varepsilon$.

La función del último ejercicio y la del último ejemplo son uniformemente continuas ya que en ambas $d_2(f(x_1), f(y_1)) \leq d_1(x_1, y_1)$ para cualesquiera x_1, y_1 de X_1.

EJERCICIO 2. Demuéstrese la siguiente proposición.

36 Proposición. *Una función uniformemente continua transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.*

Homeomorfismo

37 Definición. Se llama *homeomorfismo* entre dos espacios métricos a toda biyección continua cuya inversa es también continua.

Si $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ es un homeomorfismo los abiertos de X_2 son exactamente las imágenes de los abiertos de X_1.
Se dice que dos métricas, definidas sobre un mismo conjunto X, son *equivalentes* si la identidad $i : X \to X$ es un homeomorfismo.

1.2. Espacio topológico

38 Definición. Dado un conjunto (no vacío) cualquiera X; se llama *topología* de X a toda familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que cumpla las tres propiedades siguientes,

a. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

b. $\mathcal{T}$ es cerrada para uniones cualesquiera;

c. $\mathcal{T}$ es cerrada para intersecciones finitas;

39 Definición. Se llama *espacio topológico* a un par $(X, \mathcal{T})$ formado por un conjunto no vacío X y una topología $\mathcal{T}$ de X.
Los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan *abiertos* (de $(X, \mathcal{T})$).

40 Ejemplo. Dado un conjunto no vacío X, tanto $\mathcal{T}_t = \{\varnothing, X\}$ como $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ son topologías de X que se llaman, respectivamente, topología *trivial* y topología *discreta*.
Cualquier topología $\mathcal{T}$ de X verifica $\mathcal{T}_t \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$.

41 Ejemplo. La familia de subconjuntos abiertos de un espacio métrico es una topología.

42 Ejemplo. Dado X, la colección $\mathcal{T}_{\text{cofin}}$ compuesta por todos los subconjuntos C de X cuyo complementario es finito, aumentada con el conjunto vacío $\varnothing$, es una topología de X denominada *cofinita*.

De manera análoga, la colección $\mathcal{T}_{\text{conum}}$ compuesta por todos los subconjuntos C de X cuyo complementario es numerable, aumentada con el conjunto vacío $\varnothing$, es una topología de X denominada *conumerable*.

Observación: Se entenderá que un conjunto es *numerable*, si su cardinal es infinito numerable, finito o incluso cero

EJERCICIO 3. Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ halla todas sus topologías.

43 Definición. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías de un mismo conjunto X. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ se dice que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ o bien que $\mathcal{T}$ es más grosera que $\mathcal{T}'$. Notación: $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$

Dadas dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ de un mismo conjunto X puede ocurrir que $\mathcal{T} \not\prec \mathcal{T}'$ y que $\mathcal{T}' \not\prec \mathcal{T}$, es decir, que no sean comparables.

44 Ejemplo. Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, y $\mathcal{T}_c = \{\varnothing, \{c\}, \{a, b\}, X\}$ entonces $\mathcal{T}_a$ y $\mathcal{T}_c$ son topologías no comparables de X.

45 Ejemplo. Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_u$ es la topología de $\mathbb{R}$ generada por la métrica usual entonces $\mathcal{T}_{\text{cofin}} \prec \mathcal{T}_u$. Sin embargo, $\mathcal{T}_{\text{conum}}$ y $\mathcal{T}_u$ no son comparables.

46. *La intersección cualquiera de topologías de un mismo conjunto X es una topología de X.*

Sin embargo, la unión de dos topologías de un mismo X no es necesariamente una topología (la unión de $\mathcal{T}_a$ y $\mathcal{T}_c$ del ejemplo 44 no es una topología).
¿Puede una topología tener cardinal numerable? Sí: si $X = \mathbb{N}$ la topología $\mathcal{T}_{\text{cofin}}$ correspondiente tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.

47 Definición. Se llama subconjunto *cerrado* de una topología al complementario de un abierto.

Base de una topología

Con frecuencia, es difícil describir todos los subconjuntos que componen una topología. Suele recurrirse entonces a dar una subcolección que de alguna forma genera la topología. Una posibilidad es la siguiente.

48 Definición. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se dice que una colección de abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una *base* de la topología si todo abierto puede escribirse como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Observación: La descomposición de un abierto como unión de elementos de una base no es necesariamente única. Formalmente, el conjunto vacío es unión de la familia vacía.

49 Ejemplo. El conjunto de las bolas abiertas de un espacio métrico es una base de la topología.

50 Ejemplo. En un conjunto cualquiera X la colección de subconjuntos $\{\{x\} \mid x \in X\}$ es base de la topología discreta.

La definición de topología introduce elementos que permiten analizar de forma abstracta el concepto de cercanía, vecindad. Están basados en elementos correspondientes en la recta real o en el espacio $\mathbb{R}^n$. Una base para la topología habitual de la recta real es la formada por los intervalos abiertos de la recta. Una base para la topología habitual de $\mathbb{R}^n$ está formada por la colección

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y|_2 < r\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

51 Proposición. *Una familia de subconjuntos $\mathcal{B}$ es base de una topología de X si y solamente si*

a. $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B$, *y*

b. $\forall B_1 \in \mathcal{B}$, $\forall B_2 \in \mathcal{B}$ *se tiene que*

$$\forall x \in B_1 \cap B_2\,, \quad \exists B \in \mathcal{B} : x \in B\,, \quad B \subset B_1 \cap B_2\,.$$

Demostración.
($\Rightarrow$) *a.* Si $\mathcal{B}$ es base de una topología entonces $\cup\{\mathrm{B} : \mathrm{B} \in \mathcal{B}\} = X$, por tanto $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathrm{B}$.

b. Dados $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2 \in \mathcal{B}$, su intersección $\mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$ está en la topología y es pues unión de elementos de $\mathcal{B}$ por tanto si $x \in \mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$ existe $\mathsf{B} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathsf{B} \subset \mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$.
$(\Leftarrow)$ La condición a. implica que X está en la topología. Que la familia generada por las uniones de elementos de $\mathcal{B}$ está cerrada por uniones se obtiene directamente. Para ver que está cerrada por intersecciones finitas es suficiente ver que la intersección de dos elementos pertenece. Sea $x \in \mathsf{G} = (\cup \mathsf{B}_\alpha) \cap (\cup \mathsf{B}_\beta)$, entonces $\exists \alpha_0, \beta_0$ tales que $x \in \mathsf{B}_{\alpha_0}$ y $x \in \mathsf{B}_{\beta_0}$. Por b., existe $\mathsf{B}_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathsf{B}_x \subset \mathsf{B}_{\alpha_0} \cap \mathsf{B}_{\beta_0}$ y entonces $\mathsf{G} = \cup \mathsf{B}_x$. □

52 Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$, la colección de rectángulos abiertos $\{R_{a,b,c,d}\}_{a<b,c<d}$ definidos por:

$$R_{a,b,c,d} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < d\right\}$$

es base de una topología. De igual forma, la colección de todas las bolas abiertas de la métrica usual de $\mathbb{R}^2$ es también base de una topología. Ambas topologías coinciden.

53 Proposición. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías de un mismo conjunto X, con bases respectivas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, entonces son equivalentes*

a. $\mathcal{T}$' es más fina que $\mathcal{T}$.

b. $\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \mid x \in B' \subset B$.

Observación: Dado que la propia topología es base de sí misma, la proposición anterior se puede aplicar cambiando bien $\mathcal{B}$ por $\mathcal{T}$, bien $\mathcal{B}'$ por $\mathcal{T}$.

Demostración.
a. $\Rightarrow$ *b.*
$B \in \mathcal{B} \implies B \in \mathcal{T}'$
$\therefore\ B = \cup_{\alpha \in A} B'_\alpha,\ B'_\alpha \in \mathcal{B}'$
$\therefore \forall x \in B,\ \exists \alpha \mid x \in B'_\alpha \subset B.$
b. $\Rightarrow$ *a.*
Si $U = \cup_{\alpha \in A} B_\alpha,\ B_\alpha \in \mathcal{B}$ entonces $\forall x \in U,\ \exists \alpha \mid x \in B_\alpha$
$\therefore\ \exists B'_\alpha \in \mathcal{B}' \mid\ x \in B'_\alpha \subset B_\alpha$
por tanto, $U = \cup_{\alpha \in A} B'_\alpha \in \mathcal{T}'$.

$\square$

54 Proposición. *Sea $\mathcal{T}$ una topología de un conjunto X y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Si $\forall \mathsf{G} \in \mathcal{T},\ \forall x \in \mathsf{G},\ \exists \mathsf{B}_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathsf{B}_x \subset \mathsf{G}$ entonces $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$.*

Demostración. La familia $\mathcal{B}$ es, por elección, una familia de abiertos por lo que solamente hace falta demostrar que todo abierto de la topología es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Pero $\mathsf{G} = \cup_{x \in \mathsf{G}} \mathsf{B}_x$. $\square$

55 Ejemplo. Las bolas abiertas de $\mathbb{R}^2$ con radio racional forman una base de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

56 Ejemplo (Topología del límite inferior o de Sorgenfrey)**.** Es la topología de $\mathbb{R}$ que tiene por base la colección de intervalos $[a\,, b)$, $a < b$.

Esta colección es obviamente base de una topología ya que, (1) $\forall x \in \mathbb{R}\ , \exists a, b$ tales que $a \leq x < b$, y (2) si $x \in [a_1\ , b_1) \cap [a_2\ , b_2)$ entonces $x \in [\sup\{a_1, a_2\}\ , \text{ínf}\{b_1, b_2\})$.
La topología de Sorgenfrey es más fina que la usual ya que para cualquier intervalo abierto (a, b), se tiene que

$$(a\ , b) = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > \frac{1}{b-a}}} \left[a + \frac{1}{n}\ , b\right),$$

y obviamente es estrictamente más fina ya que ningún $[a\ , b)$ es abierto en la topología usual.
Para representar esta topología se utilizará la notación $\mathcal{T}_{\leftarrow}$.

Observación: De forma análoga se define la topología del límite superior, también más fina que la topología usual pero no comparable con la del límite inferior.

Subbase

Recuérdese (46.) que la intersección cualquiera de topologías sobre un mismo conjunto, es una topología.
Sea Σ una clase de subconjuntos de X. La intersección de todas las topologías de X que contienen a Σ es una topología que se denominará «topología generada por Σ». Cuando sea necesario, se denotará por $\mathcal{T}(\Sigma)$.

57 Definición. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una clase Σ de subconjuntos de X es *subbase* de $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Sigma)$.

Si Σ es subbase de la topología $\mathcal{T}$, los elementos de $\mathcal{T}$ se pueden escribir como uniones cualesquiera de intersecciones finitas de elementos de Σ (la intersección vacía de elementos de Σ es X). En otra palabras, el conjunto de intersecciones finitas de elementos de Σ es base de la topología.

58 Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\{(-\infty\ , b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a\ , +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ es una subbase.

59 Ejemplo. Si X es un conjunto infinito, $\{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ es una subbase de la topología $\mathcal{T}_{\text{cofin}}$

La topología del orden

A continuación se recuerda una definición dada en el curso de Conjuntos y Números.

60 Definición. Una relación $\leq$ definida en un conjunto X es una *relación de orden* si se verifican las tres propiedades siguientes,

a. Reflexiva: $\forall x \in X$, $x \leq x$.

b. Antisimétrica: $\forall x, y \in X,\ (x \leq y \quad \wedge \quad y \leq x) \quad \Rightarrow \quad x = y$.

c. Transitiva: $\forall x, y, z \in X,\ (x \leq y \quad \wedge \quad y \leq z) \quad \Rightarrow \quad x \leq z$.

61 Definición. Una relación de orden es *total* si $\forall x, y \in X,\ x \not\leq y \Rightarrow y \leq x$.

Siguiendo la costumbre se dirá que el par $(X, \leq)$ es un «conjunto ordenado» o un «conjunto totalmente ordenado», según corresponda.[3]
Dada una relación de orden, se usará el símbolo «$<$» en la forma habitual: $x < y \equiv (x \leq y \wedge x \neq y)$.

62 Definición. En un conjunto totalmente ordenado con al menos dos elementos, se define la topología del orden como aquella que tiene por base la colección de subconjuntos $\mathcal{B}_{\leq}$ formada por:

a. Todos los subconjuntos de la forma $\{x \in X \mid x < b\}, b \in X$.

b. Todos los subconjuntos de la forma $\{x \in X \mid a < x\}, a \in X$.

c. Todos los subconjuntos de la forma $\{x \in X \mid a < x < b\}, a, b \in X, a < b$.

---

[3] Estas definiciones no son uniformes en la literatura. Munkres suprime la reflexividad y a la que añade la propiedad $\forall x, y \in X,\ x \neq y \wedge x \not< y \Rightarrow y < x$ en la definición de la relación de orden «$<$» . Esto hace que su relación de orden sea «total» además de «estricta». En estas notas, si el orden es total se dirá específicamente.

El espacio topológico que se obtiene se denotará $(X, \mathcal{T}_{\leq})$.

Ejercicio 4. Demostrar que es efectivamente base de una topología en X.

Ejercicio 5. Demostrar que si $(X, \leq)$ no tiene supremo ni ínfimo entonces $\mathcal{B}_{\leq} = \{\{x \in X \mid a < x < b\} \mid a, b \in X, a < b\}$ es también una base de la topología del orden.

63 Ejemplo. Considérese $X = \mathbb{N}$ con el orden usual. La correspondiente topología del orden es la topología discreta.

64 Ejemplo. La topología correspondiente al orden usual de $\mathbb{R}$ es la topología usual.

Si $(X, \leq)$ e $(Y, \leq')$ son conjuntos ordenados; se define el *orden lexicográfico* $\preceq$ en el producto cartesiano $X \times Y$ de la siguiente manera:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \equiv (x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq' y_2)).$$

65 Ejemplo. Se considera $X = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico dado por las relaciones de orden habituales en $\{0, 1\}$ y $\mathbb{N}$. La topología del orden de X no es la topología discreta (¿por qué?).

Ejercicio 6. Comprobar que si el orden no es total entonces $\mathcal{B}_{\leq}$ no es necesariamente base de una topología (es suficiente encontrar un contraejemplo).

Ejercicio 7. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la relación de orden definida por

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \equiv x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

Comprobar que es efectivamente una relación de orden. Comprobar que el orden no es total. Si se define $\mathcal{B}_{\preceq}$ de forma análoga a la definición dada para un orden total, ¿es en este caso base de una topología de $\mathbb{R}^2$?

Recuérdese que para la topología usual de $\mathbb{R}$ todo abierto es unión disjunta (y por lo tanto, numerable) de intervalos abiertos (alguno de ellos, tal vez infinito). Sin embargo:

Ejercicio 8. En general, la siguiente afirmación no es cierta: todo subconjunto abierto propio (es decir, distinto de X y $\varnothing$) de una topología del orden es unión *disjunta* de elementos de los tipos $(\leftarrow, b)$, (a, b) y $(a, \rightarrow)$. Hallar un contraejemplo.

1.3. Producto de dos espacios topológicos

Dados dos espacios topológicos, $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, es fácil definir una topología sobre el producto cartesiano de los conjuntos $X \times Y$ utilizando directamente los abiertos de X y de Y. Más adelante se definirá la topología producto para una familia *cualquiera* de espacios topológicos que utilizará una definición abstracta de continuidad.

66 Definición. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Su topología producto se define como la generada por la base

$$\mathcal{B} = \{\mathsf{A}_X \times \mathsf{A}_Y \mid \mathsf{A}_X \in \mathcal{T}_X, \mathsf{A}_Y \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Observación: A veces nos referiremos a esta base como la *base canónica* de la topología producto

EJERCICIO 9. Comprobar que $\mathcal{B}$ es, efectivamente, base de una topología de $X \times Y$.

Los conjuntos de $\mathcal{B}$ suelen llamarse «rectángulos abiertos» de la topología producto. Evidentemente, todo rectángulo abierto es un abierto de la topología producto, pero habrá abiertos en la topología producto que no son rectángulos.

Observación: La palabra rectángulo se utiliza en un sentido amplio: en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sería un rectángulo, en el sentido recién definido, un conjunto como $((0,1) \cup (3,4)) \times (0,1) = (0,1) \times (0,1) \cup (3,4) \times (0,1)$ que es unión de lo que serían dos rectángulos disjuntos en el lenguaje habitual.

La topología producto puede obtenerse también a partir de una base más pequeña que la formada por todos los rectángulos.

67 Proposición. *Si $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ son bases de las topologías $\mathcal{T}_X$ y $\mathcal{T}_Y$ respectivamente, entonces*

$$\mathcal{B}' = \{\mathsf{A}_X \times \mathsf{A}_Y \mid \mathsf{A}_X \in \mathcal{B}_X, \mathsf{A}_Y \in \mathcal{B}_Y\}$$

es una base de la topología producto de $X \times Y$.

Demostración. Está claro que todos sus elementos son abiertos de la topología producto. Dado un abierto $\mathsf{G}_X \times \mathsf{G}_Y$ de la base canónica y un punto $(x, y) \in \mathsf{G}_X \times \mathsf{G}_Y$ existen $\mathsf{A}_X \in \mathcal{B}_X$ y $\mathsf{A}_Y \in \mathcal{B}_Y$ tales que $x \in \mathsf{A}_X \subset \mathsf{G}_X$ e $y \in \mathsf{A}_Y \subset \mathsf{G}_Y$ y por tanto $(x, y) \in \mathsf{A}_X \times \mathsf{A}_Y \subset \mathsf{G}_X \times \mathsf{G}_Y$. □

68 Ejemplo.

$$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$$

EJERCICIO 10. El conjunto de los rectángulos abiertos con uno de sus lados igual al correspondiente espacio total es subbase de la topología producto:

$$\Sigma = \{X_1 \times \mathsf{G}_2 \mid \mathsf{G} \in \mathcal{T}_2\} \cup \{\mathsf{G}_1 \times X_2 \mid \mathsf{G}_1 \in \mathcal{T}_1\}\,.$$

EJERCICIO 11. Demostrar que si $\mathcal{B}$ es una base cualquiera de la topología producto de dos espacios $(X\mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ y $\pi_X : X \times Y \to X$ es la proyección canónica entonces $\{\pi_X(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\mathcal{T}_X$.

EJERCICIO 12. Estudiar el producto de dos topologías de Sorgenfrey.

1.4. Topologías relativas

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subset X$. La restricción de los conjuntos abiertos de X al conjunto Y forman una topología de Y:

$$\mathcal{T}_Y = \{\mathsf{A} \cap Y \mid \mathsf{A} \in \mathcal{T}\}.$$

Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$ entonces

$$\mathcal{B}_Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$$

es base de la topología $\mathcal{T}_Y$.

Ejercicio 13. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, describir los abiertos de la topología relativa de un intervalo cerrado $[a, b]$ y los conjuntos abiertos de la topología relativa de un intervalo abierto (a, b).

A la vista del ejercicio anterior, los subconjuntos abiertos de la topología relativa de $[a, b]$ no son necesariamente abiertos en la topología usual de $\mathbb{R}$. Sin embargo, los abiertos relativos de (a, b) son también abiertos de $\mathbb{R}$. De forma general,

69 Proposición. *Sea $A \subset X$ un abierto del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces todo abierto de la topología relativa de A es también un abierto de X.*

Ejercicio 14. Si Σ es una subbase de $(X, \mathcal{T})$ e $Y \subset X$ entonces

$$\{Y \cap \mathsf{S} \mid \mathsf{S} \in \Sigma\}$$

es una subbsase para la topología relativa de Y.

Ejercicio 15. Demostrar que la topología producto de dos topologías relativas coincide con la topología relativa del producto.

70 Ejemplo. Sea X un conjunto totalmente ordenado. Sea $Y \subset X$. El orden de X define sobre Y un orden total que a su vez genera sobre Y una topología del orden. La topología del orden de X define sobre Y una topología relativa. ¿Coinciden estas dos topologías de Y? En general, la topología del orden restringido es menos fina que la topología relativa. Sin embargo, si Y es un subconjunto convexo de X entonces ambas topologías coinciden.

Ejercicio 16. Estudiar la topología del orden lexicográfico de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ restringida a $[0\,,\,1]\times[0\,,\,1]$. Comprobar que es más fina que la topología del orden lexicográfico de $[0\,,\,1]\times[0\,,\,1]$. Observar que $[0\,,\,1] \times [0\,,\,1]$ no es un subconjunto convexo de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.5. Entorno. Interior. Cierre. Punto de acumulación. Frontera.

Entorno Una manera de describir el conjunto de puntos que se encuentra «en las proximidades» de un punto dado es mediante el concepto de entorno. La idea es introducir un concepto que sustituya el papel que juegan las bolas en los espacios métricos.

71 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un *entorno* de un punto $x \in X$ es un subconjunto $V \subset X$ para el que existe $\mathsf{G} \in \mathcal{T}$ tal que $x \in \mathsf{G} \subset V$.

El conjunto de los entornos del punto $x \in X$ se denotará $\mathcal{V}(x)$.

Observación: En algunos textos se exige que los entornos sean conjuntos abiertos. Así lo hace Munkres.

Las siguientes cuatro propiedades son inmediatas; $\forall x \in X$:

a. $V \in \mathcal{V}(x) \implies x \in V$

b. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x) \implies V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

c. $V_1 \subset V_2, V_1 \in \mathcal{V}(x) \implies V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

d. $\forall V_1 \in \mathcal{V}(x), \exists V_2 \subset V_1 \mid V_2 \in \mathcal{V}(x) \wedge (\forall y \in V_2, V_1 \in \mathcal{V}(y))$.

Pero son interesantes en el sentido de que a través de ellas se puede dar una definición equivalente de topología:

72 Proposición. *Sea X un conjunto no vacío. Sea $\{\mathcal{F}(x)\}_{x \in X}$ una familia de clases de subconjuntos de X (es decir, $\forall x \in X, \mathcal{F}(x) \subset \mathcal{P}(X)$) con las propiedades:*

a. $V \in \mathcal{F}(x) \implies x \in V$

b. $V_1, V_2 \in \mathcal{F}(x) \implies V_1 \cap V_2 \in \mathcal{F}(x)$.

c. $V_1 \subset V_2, V_2 \in \mathcal{F}(x) \implies V_2 \in \mathcal{F}(x)$.

d. $\forall V_1 \in \mathcal{F}(x), \exists V_2 \subset V_1 \mid V_2 \in \mathcal{F}(x) \wedge (\forall y \in V_2, V_1 \in \mathcal{F}(y))$.

Entonces existe una única topología en X para la que $\mathcal{F}(x)$ es la colección de entornos de $x \in X$.

En esta única topología, un abierto es un conjunto G que cumple $\forall x \in \mathsf{G}, \exists V \in \mathcal{F}(x)$ tal que $V \subset \mathsf{G}$.

Interior

73 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathsf{C} \subset X$. Un punto $x \in X$ es un *punto interior* de C si existe un entorno de x contenido en C.

74 Proposición. *Un subconjunto G de X es abierto si todos sus puntos son interiores.*

Demostración. Obviamente, todos los puntos de un abierto son interiores.
Si se utiliza la definición de entorno, si x es interior a G entonces existe al menos un conjunto abierto V tal que $x \in V \subset \mathsf{G}$. Por tanto, si todos los puntos de G son interiores

$$\mathsf{G} = \bigcup \{V \mid V \text{ abierto}, V \subset \mathsf{G}\}. \qquad \square$$

El conjunto de todos los puntos interiores de un subconjunto C se denota $\mathring{C}$ y se denomina *interior* de C.

El interior de un subconjunto cualquiera C es la unión de todos los abiertos contenidos en él y por lo tanto es un conjunto abierto. Es el mayor abierto contenido en C.

La operación interior De forma abstracta, en un conjunto cualquiera X se define una operación interior $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que cumple las condiciones

a. $\forall C \subset X$, $i(C) \subset C$.

b. $\forall C \subset X$, $i(i(C)) = i(C)$.

c. $\forall C, C' \subset X$, $i(C \cap C') = i(C) \cap i(C')$.

d. $i(X) = X$.

Para una aplicación i dada existe una única topología $\mathcal{T}$ de X tal que $G \in \mathcal{T} \Leftrightarrow i(G) = G$.

Punto de adherencia Recoge la idea de que el punto está próximo a un conjunto dado. La adherencia de un conjunto será el conjunto de puntos que están «pegados» al conjunto.

75 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $C \subset X$. Un punto $x \in X$ es un *punto de adherencia* de C si todo entorno de x «corta» al conjunto C. Es decir, si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap C \neq \varnothing$.

El conjunto de puntos de adherencia de un conjunto dado C se llama *cierre* (o adherencia, o clausura) de C y se denota $\overline{C}$.

Todo punto de un conjunto $\mathcal{C}$ es un punto de adherencia de $\mathcal{C}$. Sin embargo, un conjunto puede tener puntos de adherencia externos: en la topología usual de $\mathbb{R}$ los extremos de un intervalo abierto son puntos de adherencia del intervalo.

Es fácil observar que cualquiera que sea $\mathcal{C}$, el complementario de su cierre, $X \setminus \overline{\mathcal{C}}$ es un abierto:

Si $x \in X \setminus \overline{\mathsf{C}}$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \cap \mathsf{C} = \varnothing$ por tanto existe $G \in \mathcal{T}$ tal que $x \in \mathsf{G} \subset V$ y $\forall y \in \mathsf{G}$, $V \in \mathcal{V}(y)$, es decir $y \notin \overline{\mathsf{C}}$, por tanto x es interior a $X \setminus \overline{\mathsf{C}}$.

La operación clausura. Dado un conjunto no vacío cualquiera X una *clausura* en X es una operación $\mathcal{Cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que cumple

a. $\forall \mathsf{C} \subset X$, $\mathsf{C} \subset \mathcal{Cl}(\mathsf{C})$.

b. $\forall \mathsf{C} \subset X$, $\mathcal{Cl}(\mathcal{Cl}(\mathsf{C})) = \mathcal{Cl}(\mathsf{C})$.

c. $\forall \mathsf{C}, \mathsf{C}' \subset X$, $\mathcal{Cl}(\mathsf{C} \cup \mathsf{C}') = \mathcal{Cl}(\mathsf{C}) \cup \mathcal{Cl}(\mathsf{C}')$.

d. $\mathcal{Cl}(\varnothing) = \varnothing$.

Dada una aplicación $\mathcal{Cl}$ existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que F es cerrado para $\mathcal{T}$ si y solamente si $\mathcal{Cl}(\mathsf{F}) = \mathsf{F}$.

Punto de acumulación Todo punto del conjunto es un punto de adherencia, pero puede haber puntos de adherencia fuera del conjunto (por ejemplo, en la topología usual de $\mathbb{R}$, los puntos de adherencia de un intervalo abierto (a, b) son todos los puntos del intervalo cerrado $[a,b]$). Un punto de adherencia x del conjunto C que no está en C tiene la propiedad de que cada uno de sus entornos tiene puntos en C distintos de x. Esta propiedad caracteriza a los puntos llamados de acumulación (o límite).

76 Definición. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathsf{C} \subset X$. Un punto x es un *punto de acumulación* de C si todo entorno de x tiene en C puntos distintos de x. Es decir, si $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \setminus \{x\} \cap \mathsf{C} \neq \varnothing$.

El conjunto de puntos de acumulación de un conjunto C se llama *conjunto derivado* y se denota C'.

Cierre Según lo recién visto, $\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{C} \cup \mathsf{C}'$.

77 Definición. Un subconjunto F de X es *cerrado* si $\overline{\mathsf{F}} = \mathsf{F}$.

78 Proposición. *En un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, un subconjunto F es cerrado si y solamente si $X \setminus \mathsf{F}$ es abierto.*

La operación *cierre* sobre los subconjuntos de X se puede caracterizar por medio de las cuatro propiedades siguientes. Si $\mathsf{C}, \mathsf{D} \subset X$,

a. $\mathsf{C} \subset \overline{\mathsf{C}}$,

b. $\overline{\overline{\mathsf{C}}} = \overline{\mathsf{C}}$,

c. $\overline{\mathsf{C} \cup \mathsf{D}} = \overline{\mathsf{C}} \cup \overline{\mathsf{D}}$,

d. $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Dado que los cerrados de una topología son los complementarios de los abiertos, una topología se puede caracterizar por medio de los conjuntos cerrados. Si se analizan las propiedades que definen el conjunto de abiertos de una topología a través de sus complementarios, se obtiene la siguiente colección de propiedades.
Una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ es la colección de cerrados de una topología si cumple las siguientes propiedades.

a. $X, \varnothing \in \mathcal{F}$.

b. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ entonces $\cap\{\mathsf{E} \mid \mathsf{E} \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{F}$.

c. Si $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \in \mathcal{F}$ entonces $\mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2 \in \mathcal{F}$.

En general, la unión cualquiera de cerrados no es cerrada, como es fácil ver con algún ejemplo sencillo en alguna topología conocida. Sin embargo el siguiente ejercicio da una condición bajo la cual esta propiedad se cumple.

Ejercicio 17. Si en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{E}$ es una familia de cerrados *localmente finita* entonces

$$\bigcup\{E \mid E \in \mathcal{E}\}$$

es un cerrado de dicho espacio.

Una familia de conjuntos es localmente finita si para cada punto del espacio hay un entorno que corta solamente a un número finito de elementos de la familia.

Ejercicio 18. Traducir la afirmación del ejercicio anterior a una familia de abiertos.

Frontera

79 Definición. Un punto $x \in X$ es un *punto frontera* de C si todo entorno V de x corta a C y a $C^{\complement}$.

Las definiciones anteriores dan pie a considerar los conjuntos de puntos correspondientes.

80 Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $C \subset X$

a. El interior del conjunto, $\mathring{C}$, es el conjunto de sus puntos interiores.

b. El cierre (o adherencia), $\overline{C}$, es el conjunto de sus puntos de adherencia.

c. El conjunto derivado, C', es el conjunto de sus puntos de acumulación.

d. La frontera, ∂C, es el conjunto de sus puntos frontera.

81. *La adherencia de un conjunto* C *es la intersección de todos los cerrados que lo contienen.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \{x \mid \forall U \in \mathcal{T}, x \in U \Rightarrow U \cap C \neq \varnothing\}\\ &= \{x \mid \forall U \in \mathcal{T}, x \notin U^{\complement} \Rightarrow C \not\subseteq U^{\complement}\}\\ &= \{x \mid \forall U \in \mathcal{T}, C \subset U^{\complement} \Rightarrow x \in U^{\complement}\}\\ &= \bigcap_{C \subset U^{\complement}} U^{\complement}\end{aligned}$$

$\square$

Los resultados siguientes son obvios.

82. *Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

83. $\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{C} \cup \mathsf{C}'$.

84. *El interior de un conjunto* C *es la unión de todos los abiertos contenidos en él.*

85. *Un conjunto es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores.*

86. $\mathring{\mathsf{C}} = \mathsf{C} \setminus \partial \mathsf{C}$.

1.6. Espacio de Hausdorff

Una vez dado el concepto de entorno de un punto se puede definir el límite de una sucesión de la siguiente manera.

87 Definición. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, la sucesión (x_n) converge al punto $x \in X$ si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $x_n \in V$.

Si se analiza esta definición en espacios topológicos generales, se pueden encontrar situaciones mucho mas generales que las habidas para espacios métricos, por ejemplo, para la topología de $\mathbb{R}$ con base $\{(-\infty\ , a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tiene por límite cualquier número $x \geq 0$. Es decir, el límite, en general, no será único. Si se quiere tratar con espacios topológicos que tengan la propiedad de unicidad de límites habrá que añadirles alguna condición. La propiedad que habitualmente se añade para conseguir esta unicidad es la llamada propiedad de Hausdorff.[4]

[4] Felix Hausdorff, 1868–1942.

En un espacio métrico la unicidad del límite se debe esencialmente a que cumple la condición siguiente: dados dos puntos distintos, x_1, x_2, existen dos bolas abiertas, centradas en uno y otro respectivamente, que no se cortan. En efecto, si $d(x_1, x_2) = r > 0$ entonces $B(x_1, \frac{r}{2}) \cap B(x_2, \frac{r}{2}) = \varnothing$.
En general, en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, dados $x_1, x_2 \in X$ no tienen por qué existir abiertos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Un espacio topológico en el que, para cualesquiera x_1, x_2, existen entornos disjuntos $V_1 \in \mathcal{V}(x_1)$, $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ se llama espacio de *Hausdorff*, T_2 o *separado*.[5] Esta es la principal de una serie de propiedades llamadas «axiomas de separación».

Algunas propiedades de los espacios de Hausdorff

88. *Todo subconjunto finito de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Un espacio en el que todo subconjunto finito es cerrado, no es necesariamente un espacio de Hausdorff. Esta propiedad se caracteriza por un axioma de separación más débil denominado T_1.

89 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_1 si $\forall x_1, x_2 \in X$, $\exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \notin U_1$ y $x_2 \in U_2$, $x_1 \notin U_2$.

[5] Más adelante se definirán espacios separables. Los dos conceptos somn muy distintos.

90. *$(X, \mathcal{T})$ es T_1 si y solamente si todo subconjunto finito de X es cerrado.*

Un axioma de separación todavía más débil que T_1 es el denominado T_0.

91 Definición. Un espacio topológico es T_0 si $\forall x_1, x_2 \in X$, $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$ ó $x_2 \in U$, $x_1 \notin U$.

92 Ejemplos.

a. Un espacio que es T_0 pero no es T_1: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{(\leftarrow,\ )})$.

b. Un espacio que es T_1 pero no T_2: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cofinita}})$.

Más adelante se estudiarán otros axiomas de separación.

93. *Si $(X, \mathcal{T})$ es T_1 y $A \subset X$ entonces*

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap A \text{ es un conjunto infinito.}$$

94. *La topología del orden siempre es Hausdorff.*

95. *El producto de dos espacios Hausdorff, también es Hausdorff.*

96. *Todo subespacio de un Hausdorff es también Hausdorff.*

2. Continuidad

2.1. Aplicación continua

97 Definición. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Una aplicación $f : X_1 \to X_2$ es *continua* si para todo $\mathrm{G} \in \mathcal{T}_2$ su imagen inversa $f^{-1}(\mathrm{G}) \in \mathcal{T}_1$.

98 Teorema. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos y $f : X_1 \to X_2$ una aplicación. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

a. *f es continua.*

b. $\forall S \subset X_1$, $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

c. *$\forall F$ cerrado de X_2, $f^{-1}(F)$ es cerrado (de X_1).*

d. *$\forall x \in X_1$ y $\forall V$ entorno de $f(x)$, $\exists U$ entorno de x tal que $f(U) \subset V$.*

La propiedad *d.* aplicada a un solo punto x es la definición de continuidad en x. La equivalencia entre *a.* y *d.* se puede expresar entonces como: «f es continua si es continua en cada punto de X_1».

Demostración. $(a \Rightarrow b)$ Dado $x \in \overline{\mathsf{S}}$, sea V un entorno abierto de $f(x)$. El conjunto $f^{-1}(\mathsf{V})$ es un entorno (abierto) de x, por tanto $f^{-1}(\mathsf{V}) \cap \mathsf{S} \neq \varnothing$. Entonces $\mathsf{V} \cap \mathsf{S} \neq \varnothing$, es decir $f(x) \in \overline{f(\mathsf{S})}$.
$(b \Rightarrow c)$ Si $x \in \overline{f^{-1}(\mathsf{F})}$ entonces $f(x) \in \overline{f(f^{-1}(\mathsf{F}))} = \overline{\mathsf{F}} = \mathsf{F}$, por tanto $x \in f^{-1}(\mathsf{F})$.
$(c \Rightarrow d)$ Si V es un entorno abierto de $f(x)$, entonces $X_2 \setminus \mathsf{V}$ es cerrado, por tanto $f^{-1}(X_2 \setminus \mathsf{V}) = X_1 \setminus f^{-1}(\mathsf{V})$ es un cerrado de X_1 y en consecuencia $f^{-1}(\mathsf{V})$ es un entorno U de x tal que $f(\mathsf{U}) \subset \mathsf{V}$.
$(d \Rightarrow a)$ Sea G un abierto de X_2. Es suficiente ver que $f^{-1}(\mathsf{G})$ es entorno de cada uno de sus puntos. Si $x \in f^{-1}(\mathsf{G})$ entonces G es un entorno de $f(x)$, por tanto existe U entorno de x tal que $\mathsf{U} \subset f^{-1}(\mathsf{G})$. $\square$

Las siguientes afirmaciones son sencillas consecuencias de la definición de continuidad.

99. *La composición de aplicaciones continuas es también continua.*

100. *La restricción de una aplicación continua a un subespacio es una aplicación continua.*

101. *Sean $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_2, \mathcal{T}_2)$ y $\mathcal{S}$ una subbase de $\mathcal{T}_2$. La aplicación f es continua si y solamente si $\forall \mathsf{S} \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(\mathsf{S}) \in \mathcal{T}_1$.*

102. *Una aplicación constante entre dos espacios topológicos siempre es continua.*

103 Proposición. *Sea $\mathcal{E}$ un recubrimiento abierto de un espacio topológico $(X_1, \mathcal{T})$ y sea $f : X_1 \to X_2$ una aplicación tal que para todo $\mathsf{E} \subset \mathcal{E}$, la restricción $f|_{\mathsf{E}} : (\mathsf{E}, \mathcal{T}_{\mathsf{E}}) \to (X_2, \mathcal{T}')$ es continua. Entonces $f : (X_1, \mathcal{T}) \to (X_2, \mathcal{T}')$ es continua.*

Demostración. Sea V un abierto de X_2, entonces

$$f^{-1}(\mathsf{V}) = \bigcup_{\mathsf{E} \in \mathcal{E}} \left(f^{-1}(\mathsf{V}) \cap \mathsf{E} \right) = \bigcup_{\mathsf{E} \in \mathcal{E}} f|_{\mathsf{E}}^{-1}(\mathsf{V})$$

que es un abierto. □

El resultado anterior no es cierto en general si el recubrimiento no es abierto, por ejemplo, sobre $\mathbb{R}$ se considera el recubrimiento formado por

$$\{(-\infty, -1]\} \bigcup \left\{ \left[-1 + \frac{1}{n} \, , 1 - \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \bigcup \{[1 \, , +\infty)\}$$

La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty \, , -1] \cup [1 \, , +\infty) \\ x & x \in (-1 \, , 1) \end{cases}$$

no es continua, pero su restricción a cada uno de los intervalos del recubrimiento sí lo es.

Para un recubrimiento cerrado hace falta pedir alguna condición extra. Una condición suficiente es la de que sea localmente finito: un recubrimiento es localmente finito si cada punto tiene un entorno que corta solamente a un número finito de elementos de la partición. Esta condición es más fuerte que la de ser puntualmente finito.

2.2. Homeomorfismo

Una aplicación continua que es biyectiva y cuya inversa es también continua se denomina *homeomorfismo*.

Si $f : X_1 \to X_2$ es un homeomorphismo es entonces una bijección entre los abiertos de X_1 y los abiertos de X_2. Las propiedades topológicas de X_1 (propiedades que se expresen solamente en los términos de su topología) se trasmiten por medio de f al espacio X_2 (y viceversa).

Si $f : X_1 \to X_2$ es continua e injectiva y $f : X_1 \to f(X_1)$ es un homeomorfismo, se dice que $f : X_1 \to X_2$ es una *inmersión* (topológica).

3. Topologías iniciales y finales

3.1. Topología inicial

Dados un conjunto X, una colección de espacios topológicos $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ y una colección de funciones $f_\alpha : X \to X_\alpha$ se llama *topología inicial* de $\{f_\alpha\}$ a la topología más débil de X que hace todas las f_α continuas.
Una subbase de la topología inicial es $\mathcal{S} = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}}\{f_\alpha^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{T}^\alpha\}$.
Pero puede afinarse un poco más:

104. *Si para cada α, $\mathcal{B}_\alpha$ es una base de la topología $\mathcal{T}_\alpha$ entonces $\cup_{\alpha\in\mathcal{A}}\{f_\alpha^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{B}_\alpha\}$ es también una subbase de la topología inicial.*

105 Ejemplo. Dados dos espacios topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ su topología producto es la topología inicial de las aplicaciones $\pi_i : X_1 \times X_2 \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$.

106 Ejemplo. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto $Y \subset X$ la topología relativa de Y es la topología inicial de la inclusión $i : Y \hookrightarrow X$.

107 Ejemplo.

EJERCICIO 1. Demostrar que si los espacios topológicos $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ son T_1 y la colección de funciones $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}$ separa puntos entonces la topología inicial también es T_1.

108 Teorema. *Sea* $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *una familia de espacios topológicos y sea* $\mathcal{T}$ *la topología inicial en un conjunto* X *determinada por las aplicaciones* $f_\alpha : X \to X_\alpha$*,* $(\alpha \in \mathcal{A})$*. Sea* $(X', \mathcal{T}')$ *otro espacio topológico y* $f : X' \to X$ *una aplicación. Entonces son equivalentes*

a. $f : (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ *es continua.*

b. $\forall \alpha \in \mathcal{A},\ f_\alpha \circ f : (X', \mathcal{T}') \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *es continua.*

Demostración. Solamente hay que demostrar que si todas las $f_\alpha \circ f$ son continuas entonces f es continua ya que la implicación recíproca es inmediata. Sea B un elemento de la subbase definida en 104. Es suficiente ver que $f^{-1}(\mathrm{B})$ es un abierto. Pero $\mathrm{B} = f_\alpha^{-1}(\mathrm{G})$ donde G es un abierto de X_α, por tanto $f^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(f_\alpha^{-1}(\mathrm{G})) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(\mathrm{G})$ que es efectivamente abierto. □

3.2. Espacio topológico producto

Dada una familia cualquiera de espacios topológicos $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se quiere definir la topología producto sobre el producto cartesiano $\prod X_\alpha$. Recordemos primeramente qué se entiende por producto cartesiano de una familia cualquiera de conjuntos no vacíos. Se considera el conjunto $X = \cup_\alpha X_\alpha$. El producto cartesiano es el conjunto de aplicaciones $\kappa : \mathcal{A} \to X$ que tienen la propiedad: $\forall \alpha \in \mathcal{A},\ \kappa(\alpha) \in X_\alpha$.

Si ahora se generaliza de forma directa la definición de topología producto dada para el producto de dos (o un número finito de) espacios tomando como base de la topología el conjunto de «rectángulos»

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \,|\, \forall \alpha, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \right\},$$

donde $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección canónica $\pi_\alpha(\kappa) = \kappa(\alpha)$, se obtiene una topología demasiado fina (que utilizaremos como fuente de ejemplos y denotaremos $\mathcal{T}_\square$). La definición útil para la topología producto es la siguiente.

Definición 109. Se llama topología producto de los espacios topológicos $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ a la topología inicial determinada por las proyecciones $\pi_\alpha : X \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Se denotará $\mathcal{T}_\Pi$.

Con esta definición resulta que la topología producto es la que tiene por subbase

$$\mathcal{S}_\Pi = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \pi_\alpha^{-1}(U) \,|\, U \in \mathcal{T}_\alpha \right\},$$

y por tanto una base será

$$\mathcal{B}_\Pi = \left\{ \prod \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \,|\, U_\alpha = X_\alpha \text{ excepto para un número finito que } U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \right\}.$$

Ejercicio 2. Demostrar que si los espacios $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ son T_2 entonces tanto $\mathcal{T}_\square$ como $\mathcal{T}_\Pi$ son también T_2.

110 Proposición. *Dada una familia de espacios topológicos* $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *y subconjuntos* $\mathsf{D}_\alpha \subset X_\alpha$ *entonces se tiene que* $\prod \overline{\mathsf{D}}_\alpha = \overline{\prod \mathsf{D}_\alpha}$ *en la topología producto* $\mathcal{T}_\Pi$.

Demostración. Si $x = (x_\alpha) \in \prod \overline{\mathsf{D}}_\alpha$ entonces $\forall \alpha$, $x_\alpha \in \overline{\mathsf{D}}_\alpha$. Dado un entorno abierto V de x que esté en la base $\mathcal{B}_\Pi$, es decir $\mathsf{V} = \prod G_\alpha$, se tiene que cada G_α es un entorno abierto de x_α y por tanto $G_\alpha \cap \mathsf{D}_\alpha \neq \varnothing$, por tanto $\mathsf{V} \cap \prod \mathsf{D}_\alpha \neq \varnothing$ y entonces $x \in \overline{\prod \mathsf{D}_\alpha}$.
Recíprocamente, si $x = (x_\alpha) \in \overline{\prod \mathsf{D}_\alpha}$ sea V_{α_0} un entorno abierto de x_{α_0}, entonces $\mathsf{V} = \prod \mathsf{G}_\alpha$, con $\mathsf{G}_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_0$ y $\mathsf{G}_{\alpha_0} = \mathsf{V}_{\alpha_0}$, es un entorno de x y por tanto $\mathsf{V} \cap \prod \mathsf{D}_\alpha \neq \varnothing$ que implica $\mathsf{V}_{\alpha_0} \cap \mathsf{D}_{\alpha_0} \neq \varnothing$ y en consecuencia $x_{\alpha_0} \in \overline{\mathsf{D}}_{\alpha_0}$. Así $x \in \prod \overline{\mathsf{D}}_\alpha$. $\square$

EJERCICIO 3. Demostrar que la anterior proposición también es cierta para $\mathcal{T}_\square$.

3.3. Topología final

De una manera simétrica a la utilizada para definir la topología inicial se puede definir una topología final en un conjunto X de una familia de aplicaciones $f_\alpha : X_\alpha \to X$ y de topologías $\mathcal{T}_\alpha$ en los conjuntos X_α. De nuevo se quiere una topología que haga continuas todas las aplicaciones f_α. Ahora la topología trivial de X cumple la anterior propiedad, sin embargo la topología discreta solamente la cumplirá en contadas ocasiones. La topología final será la más fina que cumple esta propiedad.

111 Definición. La topología final de la familia de aplicaciones $f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to X$ es la topología más fina $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$ de X que hace continuas todas las aplicaciones f_α.

Si G es un abierto de $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$ entonces $f_\alpha^{-1}(\mathrm{G})$ será abierto de $\mathcal{T}_\alpha$ para todo α. Los abiertos de $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$ serán exactamente estos conjuntos.

112 Proposición. *La topología final de las aplicaciones f_α es exactamente*

$$\mathcal{T}_{\mathrm{f}} = \left\{ \mathrm{G} \subset X \mid \forall \alpha \ f_\alpha^{-1}(\mathrm{G}) \in \mathcal{T}_\alpha \right\}.$$

Demostración. Es suficiente ver que $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$ es efectivamente una topología. Esto es consecuencia de que las uniones e intersecciones se comportan bien por imágenes inversas. $\square$

113 Ejemplo. La intersección de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ definidas sobre un mismo conjunto X es la topología final de las identidades $i_\alpha : (X, \mathcal{T}_\alpha) \to X$.

114 Ejemplo (Suma de topologías).

115 Proposición. *Sea $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$ la topología final en X de una familia de aplicaciones $f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to X$ entonces una aplicación $g : (X, \mathcal{T}_{\mathrm{f}}) \to (X', \mathcal{T}')$ es continua si y solamente si $\forall \alpha$, $g \circ f_\alpha$ es continua.*

Demostración. Solamente hace falta ver que cuando todas las $g \circ f_\alpha$ entonces g es continua. Dado $G \in \mathcal{T}'$ el conjunto $g^{-1}(\mathsf{G})$ es abierto de $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$ si para todo α, $f_\alpha^{-1}(g^{-1}(\mathsf{G})) \in \mathcal{T}_\alpha$. Pero este último conjunto es $(g \circ f_\alpha)^{-1}(\mathsf{G})$ es efectivamente abierto de $\mathcal{T}_\alpha$ por la continuidad de $g \circ f_\alpha$. $\square$

Ejercicio 4. Demostrar que un conjunto F es cerrado para la topología final de las f_α si y solamente si para todo α, $f_\alpha^{-1}(\mathsf{F})$ es un cerrado de la topología $\mathcal{T}_\alpha$.

3.4. Espacio topológico cociente

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre el conjunto X. Sobre el conjunto de clases de equivalencia $X/\mathcal{R}$ se define una topología compatible con los abiertos de $\mathcal{T}$ que sean además unión de clases de equivalencia. Esta será la llamada topología cociente.

116 Definición. La topología cociente de $(X, \mathcal{T})$ realtiva a la relación $\mathcal{R}$ es la topología final en $X/\mathcal{R}$ definida por la identificación canónica $q : X \to X/\mathcal{R}$ que aplica cada $x \in X$ en su clase de equivalencia $[x]$.

Por la definición de topología final se tiene la caracterización siguiente de los abiertos de la topología cociente.

117. $G \subset X/\mathcal{R}$ *es abierto* $\Leftrightarrow q^{-1}(G) \in \mathcal{T}$.

El estudio de la topología cociente también se puede realizar a partir de las llamadas *aplicaciones cociente*.

118 Definición. Una función $q : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es una *aplicación cociente* si es suprayectiva, continua y tal que $G \in \mathcal{T}' \leftrightarrow q^{-1}(G) \in \mathcal{T}$.

Una aplicación f siempre define una relación de equivalencia en el conjunto en el que está definida: $x\mathcal{R}_f y \equiv f(x) = f(y)$. Si $q : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación cociente entonces $(X', \mathcal{T}')$ es homeomorfo a $(X/\mathcal{R}_q, \mathcal{T}_q)$.

119 Proposición. *Una aplicación suprayectiva, continua y abierta es siempre una aplicación cociente.*

Demostración. Si la aplicación es f, es suficiente comprobar que si $f^{-1}(D)$ es abierto entonces D es abierto. Pero, por ser f suprayectiva, $D = f(f^{-1}(D))$ que es abierto al ser f abierta. □

120 Corolario. *Una aplicación suprayectiva, continua y cerrada es siempre una aplicación cociente.*

Sin embargo, hay aplicaciones suprayectivas, continuas y abiertas (o cerradas) que no son aplicaciones cociente.

121 Ejemplo. La proyección $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la primera coordenada es una aplicación cociente (es suprayectiva, continua y abierta) pero no es cerrada: la imagen del conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ es el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ que no es un cerrado de $\mathbb{R}$.

122 Definición. Dada una aplicación $f : X \to Y$ un subconjunto D de X se dice *saturado* para f si $\mathsf{D} = f^{-1}(f(\mathsf{D}))$. En otras palabras, si $x \in \mathsf{D}$ entonces todo $y \in X$ tal que $f(y) = f(x)$ también está en D. Es decir, D es una unión de las clases de equivalencia definidas en X por la aplicación f. La saturación de un conjunto D por la aplicación f es el conjunto $f^{-1}(f(\mathsf{D}))$.

Las aplicaciones cociente son abiertas sobre abiertos saturados y son cerradas sobre cerrados saturados, por tanto se tiene el siguiente resultado.

123 Proposición. *Las tres condiciones siguientes son equivalentes.*

a. f es una aplicación cociente.

b. f es suprayectiva, continua y abierta sobre abiertos saturados.

c. f es suprayectiva, continua y cerrada sobre cerrados saturados.

EJERCICIO 5. Dar un ejemplo de una aplicación cociente que no sea ni abierta ni cerrada.

124 Proposición.

a. *Una aplicación cociente q es abierta si y solamente si la saturación por q de un abierto es abierta.*

b. *Una aplicación cociente q es cerrada si y solamente si la saturación (por q) de un cerrado es cerrada.*

125 Proposición. *Sean X, Y, Z espacios topológicos y $q : X \to Y$ una aplicación cociente. La aplicación $f : Y \to Z$ es continua si y solamente si $f \circ q$ es continua.*

4. Conexión

Tenemos una idea clara de lo que entendemos por conexión para subconjuntos de, digamos, $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, la definición en un espacio topológico cualquiera resulta en principio sorprendente.

4.1. Espacio conexo. Subconjunto conexo

126 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *conexo* si no existe una partición formada por dos abiertos no vacíos.

En otras palabras, X es conexo si $X = \mathsf{G}_1 \bigcup \mathsf{G}_2$, G_1, G_2 abiertos, $\mathsf{G}_1 \bigcap \mathsf{G}_2 = \varnothing$ implica $\mathsf{G}_1 = X$ ó $\mathsf{G}_2 = X$.
Obviamente, la imposibilidad de obtener una partición por dos abiertos es equivalente a la imposibilidad de una partición por dos cerrados disjuntos.
De forma equivalente, un espacio topológico X es conexo si los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\varnothing$.

127 Definición. Un subconjunto $Y \subset X$ es conexo si lo es como subespacio topológico.

El análisis de la conexión de un subconjunto puede realizarse directamente por medio de los abiertos (o cerrados) del espacio.

128 Proposición. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico e* $Y \subset X$*.*

a. *Y es conexo si y solamente si dados $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ abiertos de X tales que $Y \subset \mathsf{G}_1 \bigcup \mathsf{G}_2$ e $Y \cap \mathsf{G}_1 \cap \mathsf{G}_2 = \varnothing$ se tiene que $Y \subset \mathsf{G}_1$ ó $Y \subset \mathsf{G}_2$.*

b. *Y es conexo si y solamente si dados $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2$ cerrados de X tales que $Y \subset \mathsf{F}_1 \bigcup \mathsf{F}_2$ e $Y \cap \mathsf{F}_1 \cap \mathsf{F}_2 = \varnothing$ se tiene que $Y \subset \mathsf{F}_1$ ó $Y \subset \mathsf{F}_2$.*

129 Ejemplos.

a. Con la topología trivial, todo subconjunto es conexo.

b. Con la topología discreta, ningún subconjunto no unitario es conexo.

c. En $\mathbb{R}_{\mathrm{u}}$, el subconjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales no es conexo: existe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y por tanto $\mathbb{Q} \subset (-\infty\,, t) \cup (t\,, +\infty)$.

d. En $\mathbb{R}_{\mathrm{u}}$, $\mathsf{A} \subset X$ es conexo si y solamente si A es un intervalo (acotado o no).

e. El espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)})$ no es conexo: $\mathbb{R} = (-\infty\,, 0) \cup [0\,, +\infty)$.

130 Proposición. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si X es conexo entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Sea G_1 y G_2 abiertos de Y tales que $f(X) \subset G_1 \cup G_2$ y $G_1 \cap G_2 \cap f(X) = \varnothing$. Entonces $f^{-1}(G_1)$ y $f^{-1}(G_2)$ son abiertos disjuntos de X y $X = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$, por tanto, bien $f^{-1}(G_1) = \varnothing$, bien $f^{-1}(G_2) = \varnothing$, es decir, bien $f(X) \subset G_1$, bien $f(X) \subset G_2$. □

131 Corolario. *La imagen continua de un intervalo es un intervalo.*

132 Corolario. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entonces X es conexo si y solamente si Y es conexo.*

Este corolario nos permite en algunos casos decidir que dos espacios no son homeomorfos: cuando uno de ellos es conexo y el otro no lo es.

133 Ejemplo. Los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no son homeomorfos.

La siguiente proposición permite estudiar la conexión de algunos subconjuntos de un espacio topológico que pueden escribirse como unión de subconjuntos conexos.

134 Proposición. *Sea $\{D_\alpha\}$ una colección de subconjuntos conexos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Si $\cap D_\alpha \neq \varnothing$ entonces $\cup D_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Sean G_1, G_2 abiertos tales que $\cup D_\alpha \subset G_1 \cup G_2$ y $G_1 \cap G_2 \cap (\cup D_\alpha) = \varnothing$. Dado que $\exists c \in \cap D_\alpha \subset G_1 \cup G_2$, si $c \in G_1$ entonces $\forall \alpha$, $G_1 \cap D_\alpha \neq \varnothing$ y por conexión $D_\alpha \subset G_1$, por tanto $\cup D_\alpha \subset G_1$. □

135 Corolario. *Si* $(X_1, \mathcal{T}_1)$ *y* $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *son espacios topológicos conexos entonces* $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ *también es conexo.*

La proposición siguiente nos dice que el paso de un conjunto a su cierre no rompe la conexión.

136 Proposición. *Si* E *es un subconjunto conexo de un espacio topológico, entonces todo* D, $\mathsf{E} \subset \mathsf{D} \subset \overline{\mathsf{E}}$, *es conexo.*

Demostración. Sean $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2$ cerrados tales que $\mathsf{D} \subset \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$ y $\mathsf{D} \cap \mathsf{F}_1 \cap \mathsf{F}_2 = \varnothing$. Sin pérdida de generalidad, $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \subset \overline{\mathsf{E}}$. Entonces $\mathsf{E} \subset \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$ y $\mathsf{E} \cap \mathsf{F}_1 \cap \mathsf{F}_2 = \varnothing$ por tanto, bien $\mathsf{E} \subset \mathsf{F}_1$ y entonces $\overline{\mathsf{E}} \subset \mathsf{F}_1$ (y en consecuencia $\mathsf{D} \subset \mathsf{F}_1$), bien $\mathsf{E} \subset \mathsf{F}_2$ y entonces $\overline{\mathsf{E}} \subset \mathsf{F}_2$ (y en consecuencia $\mathsf{D} \subset \mathsf{F}_2$). $\square$

137 Corolario. *El cierre de un subconjunto conexo es conexo.*

138 Definición. Un *continuo lineal* es un conjunto X totalmente ordenado, con más de un punto, en el que se cumplen además las dos propiedades siguientes:

a. *Existencia de supremo.* Todo subconjunto acotado superiormente tiene una mínima cota superior.

b. *Valor intermedio.* Si $x, y \in X$ y $x < y$ entonces $\exists z \in X$ tal que $x < z < y$.

139 Ejemplos.

- La recta real.
- El cuadrado ordenado: $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ con el orden lexicogŕafico.
- La recta larga. Al conjunto totalmente ordenado de ordinales finitos o numerables se añade entre cada dos ordinales consecutivos una copia del intervalo $(0,1)$ de $\mathbb{R}$.
- Si X es un conjunto bien ordenado (totalmente ordenado en el que cada subconjunto tiene primer elemento) entonces el producto $X \times [0,1)$ con el orden lexicográfico es un continuo lineal.

140 Teorema. *En un continuo lineal, todo convexo es conexo.*

Demostración. Se observa en primer lugar que es suficiente demostrar que todo continuo lineal es conexo. La razón es que todo convexo con el orden inducido es también un continuo lineal cuya topología coincide con la topología relativa.
Sean G_1 y G_2 abiertos tales que $X = \mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2$ y $\mathsf{G}_1 \cap \mathsf{G}_2 = \varnothing$. Si existen $x_1 \in \mathsf{G}_1$ y $x_2 \in \mathsf{G}_2$ (sin pérdida de generalidad, $x_1 < x_2$) sea $m = \sup(\mathsf{G}_1 \cap [x_1, x_2])$. Obviamente, por ser G_1 y G_2 abiertos, $m \in (x_1, x_2)$. Pero entonces si $m \in \mathsf{G}_i$, m es también interior a $\mathsf{G}_i \cap (x_1, x_2)$ y por tanto no puede ser el $\sup(\mathsf{G}_1 \cap [x_1, x_2])$. En consecuencia, bien $\mathsf{G}_1 = \varnothing$, bien $\mathsf{G}_2 = \varnothing$. $\square$

141 (Teorema del valor intermedio). *Si $f : X \to Y$ es continua, X es conexo, Y es un conjunto totalmente ordenado y $f(a) < y < f(b)$ entonces existe $c \in X$ tal que $f(c) = y$.*

Demostración. En otro caso $X = f^{-1}((\leftarrow, y)) \cup f^{-1}((y, \rightarrow))$, contrario a que X sea conexo. $\square$

Ejercicio 1. Todo espacio métrico conexo con al menos dos elementos es no numerable.

Demostración. $d(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua por tanto $d(X \times X)$ es conexo de $\mathbb{R}$ con más de un punto y por tanto no numerable. Entonces X es no numerable. $\square$

4.2. Componentes conexas

En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se considera la relación $x\mathcal{R}y$ si existe un subconjunto conexo $\mathcal{C} \subset X$ tal que $x, y \in \mathcal{C}$. Obviamente, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son subconjuntos conexos de X llamados *componentes conexas* de X. Un espacio conexo X solamente tiene una componente conexa.

La componente conexa de un punto x es la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen el punto x.

$$C_x = \bigcap \{C : x \in \mathrm{C} \text{ conexo } \}$$

142 Proposición. *Las componentes conexas son subconjuntos cerrados.*

Demostración. Es consecuencia de que el cierre de un subconjunto conexo es también conexo. □

En general, las componentes conexas no tienen por qué ser subconjuntos abiertos. Un ejemplo es $\mathbb{Q}$(sus componentes conexas son los conjuntos unitarios).
Si el número de componentes conexas es finito entonces las componentes conexas si son abiertas (el complementario de una componente conexa es la unión —finita— de las demás). Una forma de conseguir que las componentes conexas sean abiertas es por medio de la condición conexión local.

143 Definición. En un espacio topológico X una base de entornos de un punto $x \in X$ es una colección de entornos $\{V_\alpha\} \subset \mathcal{V}(x)$ tal que para todo abierto $\mathrm{G} \ni x$ existe α tal que $x \in V_\alpha \subset \mathrm{G}$.

144 Definición. Un espacio topológico *localmente conexo* es aquel en el que todo punto tiene una base de entornos conexos.

De forma equivalente, X es localmente conexo si para todo abierto G y todo $x \in$ G existe V, entorno conexo de x, tal que $x \in V \subset$ G.

Ejercicio 2. Si en un espacio X todo punto tiene un entorno conexo entonces toda componente conexa es abierta. En consecuencia, en todo espacio localemente conexo toda componente conexa es abierta.

Ejercicio 3. Un espacio es localmente conexo si y solamente si las componentes conexas de los subconjuntos abiertos son abiertas.

4.3. Conexión por caminos

Un camino en un espacio topológico X es una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to X$. Se dice que el camino γ une los puntos $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ de X.

145 Definición. Un espacio topológico X es *conexo por caminos* si dados $x, y \in X$ cualesquiera existe un camino γ que une x e y.

El concepto de conexión por caminos es más intuitivo respecto de la idea de conexión que el propio concepto de conexión. En general, la siguiente implicación es cierta pero no su recíproca.

146 Proposición. *Si X es un espacio topológico conexo por caminos entonces también es conexo.*

Demostración. Fijado $x_0 \in X$, para cualquier otro $x \in X$ existe un camino γ_x que une x_0 con x. Dada la continuidad de cada γ_x el conjunto $\gamma_x([0,1])$ es un subconjunto conexo de X. Como $x \in \cap_x \gamma_x([0,1]) \neq \varnothing$ se tiene que $X = \cup_x \gamma_x([0,1])$ es conexo. $\square$

Este resultado permite dar un ejemplo de un espacio conexo que no es localmente conexo.

147 Ejemplo. El espacio $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists q \in \mathbb{Q} : y = qx\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$ no es localmente conexo: el punto $1,1)$ no tiene entornos conexos contenidos en $B((1,1),1/2) \cap X$. Sin embargo es conexo ya que es conexo por caminos: dos puntos cualesquiera se pueden conectar a través de dos segmentos radiales que se unen en el punto $(0,0)$.

Como ya se ha advertido, un conexo no tiene por qué ser conexo por caminos.

148 Ejemplo. *El seno del topólogo.* Sea $\mathsf{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\frac{1}{x}, x \in (0,1]\}$. En la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ es conexo por caminos y por tanto conexo. Su cierre $\overline{\mathsf{E}} = \mathsf{E} \cup (\{0\} \times [-1,1])$ es entonces conexo. Sin embargo no es conexo por caminos: si existiera $\gamma : [0,1] \to \overline{\mathsf{E}}$ uniendo un punto $(0,a)$ con $(1,0)$, sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\forall t > 0, \gamma(t) \in \mathsf{E}$. Por continuidad la función $\pi_1 \circ \gamma$ se alcanza todo valor de $[0,1]$, en particular $x_n = \frac{1}{2n+1}$ en, digamos, t_n con $t_n \searrow 0$. Se tiene entonces que $\gamma(t_n) = (\frac{1}{2n+1}, (-1)^n)$. Como $\pi_2 \circ \gamma$ es continua, $\lim \pi_2 \circ \gamma(t_n) = \gamma(0)$ pero $\pi_2 \circ \gamma(t_n) = (-1)^n$.

Al igual que se introdujo el concepto de componentes conexa, se define componente conexa por caminos a través de la relación de equivalencia $x\mathcal{R}y \equiv \exists\gamma$ camino en X que une x e y. Las componentes conexas por caminos se definen como las clases de equivelencia de esta relación. Obviamente, una componente conexa por caminos es es un subconjunto conexo por caminos. En general, las componentes conexas por caminos son menores que las componentes conexas en el sentido de que una componentes conexa puede ser unión de más de una componente conexa por caminos. En otras palabras, la partición del espacio X en componentes conexas por caminos es mas fina que la partición en componentes conexas.

En particular, en el ejemplo 148 de la página 65, el espacio $\overline{\mathsf{E}}$ es conexo pero tiene dos componentes conexas por caminos E y $(\{0\} \times [-1, 1])$. De hecho, un espacio conexo puede tener una cantidad no numerable de componentes conexas por caminos: si en el ejemplo citado se suprimen de $\overline{\mathsf{E}}$ los puntos de $\{0\} \times \mathbb{Q}$, el conjunto resultante $S = \overline{\mathsf{E}} \setminus (\{0\} \times \mathbb{Q})$ es conexo pues $\mathsf{E} \subset \mathsf{S} \subset \overline{\mathsf{E}}$ sin embargo cada conjunto $\{(0, t)\}$ con $t \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}$ es una componente conexa por caminos.

5. Compacidad

En los cursos de Cálculo se demuestra que las funciones definidas en los intervalos cerrados tienen propiedades interesantes. Por ejemplo, una función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y su mínimo.

También se estudian distintas caracterizaciones de los intervalos cerrados. Por ejemplo, el teorema de Heine–Borel dice que si un intervalo cerrado está recubierto por una colección de conjuntos abiertos entonces existe una subcoleccción finita de los mismos que también recubre el intervalo. Esta propiedad, además caracteriza los subconjuntos cerrados y acotados. Otras propiedades que también caracterizan los cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ (incluso de $\mathbb{R}^n$) son las siguientes:

Toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación.

Toda colección de cerrados con la propiedad de intersección finita no vacía, tiene también la propiedad de intersección no vacía.

Esta última propiedad es equivalente (solamente hace falta utilizar las leyes de de Morgan para verlo) a la propiedad de existencia del subrecubrimiento finito de un recubrimiento por abiertos.

Resulta que de todas ellas la que resulta adecuada para generalizar las características de los cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ es esta última (equivalente a la primera).

5.1. Espacio topológico compacto — subconjunto compacto

149 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *compacto* si de todo recubrimiento de X por conjuntos abiertos $\{\mathsf{G}_\alpha\}$, se puede extraer un subrecubrimiento finito $\{\mathsf{G}_{\alpha_1}, \ldots, \mathsf{G}_{\alpha_n}\}$.

Un subconjunto K de un espacio topológico X es compacto si lo es con la topología relativa.

150 Proposición. *Un subconjunto K de un espacio topológico X es compacto si y solamente si de todo recubrimiento de K por abiertos de X se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

Es decir, K es compacto de $(X, \mathcal{T})$ si $K \subset \cup_\alpha G_\alpha$, $G_\alpha \in \mathcal{T}$ implica que $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$.
De forma equivalente, utilizando las leyes de de Morgan para demostrarlo

151 Proposición. *Un espacio $(X, \mathcal{T})$ es compacto si toda colección $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de cerrados de X que tiene la propiedad de intersección finita no vacía (es decir, $\forall A' \subset A$, A' finito, $\bigcap_{\alpha \in A'} F_\alpha \neq \varnothing$) tiene intersección no vacía: $\cap_{\alpha \in A} A_\alpha \neq \varnothing$.*

La compacidad es una propiedad topológica en el sentido que se transmite por aplicaciones continuas.

152 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si X es un espacio compacto entonces $f(X)$ también es compacto.*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de $f(Y)$, entonces $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ es un recubrimiento de abierto de X, por lo que existe un subrecubrimiento $f^{-1}(V_{\alpha_1})$, $f^{-1}(V_{\alpha_2})$, $\dots$, $f^{-1}(V_{\alpha_k})$. Entonces $f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}$. $\square$

En consecuencia, si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, X es compacto si y solamente si Y es compacto.

153 Teorema. *Sea X un espacio topológico compacto y sea $Y \subset X$. Si Y es cerrado entonces también es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de Y. Entonces $\{U_\alpha\} \bigcup \{X \setminus Y\}$ es un recubrimiento abierto de X. Por tanto existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tales que $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k} \cup (X \setminus Y)$. Así, $Y \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$. $\square$

El recíproco es cierto en espacios con el axioma de separación T_2, pero no en general.

154 Teorema. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y sea $Y \subset X$. Si Y es compacto entonces es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus Y$; $\forall y \in Y, \exists U_y, V_y$ entornos abiertos de x e y respectivamente tales que $U_y \cap V_y = \varnothing$. Entonces existen $y_1, y_2, \ldots, y_k \in Y$ tales que $Y \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_k}$ y además $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_k}$ es un entorno abierto de x que no interseca a Y por tanto x es un punto interior de $X \setminus Y$. Es decir, $X \setminus Y$ es abierto y en consecuencia Y es cerrado. □

Observación: En un espacio topológico que no es T_2 puede haber muchos compactos pero pocos cerrados, e. g., en la topología cofinita en un conjunto infinito: todo conjunto es compacto ya que tomado un primer abierto del recubrimiento solamente quedará por recubrir un número finito de puntos. Sin embargo, solamente son cerrados los subconjuntos finitos.

Los dos teoremas anteriores dan el siguiente resultado.

155 Corolario. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces un subcojunto es compacto si y solamente si es cerrado.*

Ejercicio 1. Demostrar que si en un espacio topológico coinciden los subconjuntos compactos con los cerrados entonces el espacio es compacto y T_1.
Dar un ejemplo de un espacio en el que los subconjuntos compactos coinciden con los cerrados pero no es T_2.

Ejercicio 2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces toda topología estrictamente más fina que $\mathcal{T}$ no es compacta y toda topología estrictamente menos fina que $\mathcal{T}$ no es Hausdorff.

La demostración del último teorema prueba en realidad algo más.

156 Proposición. *Si X es un espacio topológico de Hausdorff, Y un subconjunto compacto y $x \in X \setminus Y$ entonces existen abiertos U_x, U_Y tales que $x \in U_x$, $Y \subset U_Y$ y $U_x \bigcap U_y = \varnothing$.*

Observación: Entre los axiomas de separación, se define el de regularidad de la siguiente manera: un espacio topológico se dice regular si para todo cerrado F y todo $x \notin F$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $F \subset U$ y $x \in V$. Si un espacio regular es además T_2 se dice que es T_3.

157 Teorema. *Sea $f : X \to Y$ una biyección continua. Si X es compacto e Y es T_2 entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Es suficiente ver que si $F \subset X$ es cerrado entonces $f(F)$ es cerrado.
Si F es cerrado en X compacto, es también compacto, por tanto su imagen por f es un compacto, que en un T_2 es cerrado. □

158 Proposición. *Sea X un espacio topológico compacto y sea $\{F_n\}$ una cadena decreciente de cerrados no vacíos de X. Entonces $\bigcap F_n \neq \varnothing$.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la caracterización de compactos por medio de la propiedad de intersección finita de cerrados. □

159 Corolario. *Sea $\{F_n\}$ una cadena decreciente de cerrados no vacíos de un espacio topológico X. Si existe n tal que F_n es compacto entonces $\cap F_n \neq \varnothing$.*

5.2. Compacidad y topología del orden

A fin de estudiar las propiedades de los compactos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^n$ comenzamos estudiando las propiedades de los compactos de la topología del orden.

160 Proposición. *Sea X un conjunto totalmente ordenado y con la propiedad del supremo. Entonces todo intervalo cerrado de X (es decir, todo subconjunto $\{x : a \leq x \leq b\}$) es un compacto para la topología del orden.*

Observación: Es suficiente demostrar que la topología del orden de un conjunto totalmente ordenado, con la propiedad del supremo y con máximo y mínimo, es una topología compacta, ya que la topología relativa de un intervalo coincide con la topología del orden relativo.

Demostración. Sea $X = [a\,, b]$ y $\mathcal{R}$ un recubrimiento abierto de X. Sea C el conjunto de puntos $y \geq a$ tales que $[a\,, y]$ tiene un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$. Se observa que:
1. C es no vacío ya que $a \in C$.
2. Si c es el supremo de C entonces $c \in C$. En efecto, si $U \in \mathcal{R}$ y $c \in U$, por ser c interior a U existe $c' < c$ tal que $(c'\,, c] \subset U$. Añadiendo U a un subrecubrimiento finito de $[a\,, c']$ se obtiene un subrecubrimiento finito de $[a\,, c]$.
3. $c = b$: si $a < x < b$ y existe subrecubrimiento finito de $[a\,, x]$ entonces existe $x' > x$ tal que $[a\,, x']$ tiene subrecubrimiento finito.
En consecuencia, existe subrecubrimiento finito de $[a\,, b]$. $\square$

161 Corolario. *Todo intervalo cerrado (y acotado) de* $\mathbb{R}$ *es compacto.*

Un resultado análogo se cumple en $\mathbb{R}^n$.

162 Teorema (Heine–Borel). *Sea* K *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$, *entonces* K *es compacto si y solamente si* K *es cerrado y existe* $M > 0$ *tal que* $\mathsf{K} \subset [-M\,, M]^n$.

Para demostrarlo se utilizará el resultado siguiente.

163 Teorema. *El producto cartesiano de un número finito de espacios topológicos compactos es un espacio topológico compacto.*

Este teorema es un caso particular del resultado conocido como «Teorema de Tijonov», que afirma que el producto **cualquiera** de espacios topológicos compactos es un espacio topológico compacto. La demostración del teorema de Tijonov requiere algo más de artillería de la que vamos a utilizar para demostrar este caso particular y que se reduce al siguiente lema.

164 Lema (Lema del cilindro). *Sean* X *e* Y *espacios topológicos,* Y *compacto. Sea* $x_0 \in X$, *si* W *es un abierto de* $X \times Y$ *tal que* $\{x_0\} \times Y \subset W$ *entonces existe* U_0, *entorno abierto de* x_0, *tal que* $U_0 \times Y \subset W$.

Demostración. Para cada $y \in Y$ existen entornos abiertos U_y y V_y de x_0 en X y de y en Y respectivamente tales que $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset W$. La colección $\{U_y \times V_y : y \in Y\}$ es un recubrimiento abierto de $\{x_0\} \times Y$ que es compacto (homeomorfo a Y) por tanto existe un subconjunto finito Y' de Y tal que $\{x_0\} \times Y \subset \bigcup\{U_y \times V_y : y \in Y'\}$. Entonces el conjunto $U_0 = \cap\{U_y : y \in Y'\}$ es un entorno abierto de x_0 y $U_0 \times Y \subset W$. □

165 Proposición. *El producto cartesiano de dos espacios topológicos compactos es un espacio topológico compacto.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos compactos y sea $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$. Para cada $x \in X$, el subconjunto $\{x\} \times Y$ es compacto y existe por tanto un subconjunto finito A^x de A tal que $W^x = \cup\{W_\alpha : \alpha \in A^x\} \supset \{x\} \times Y$. Por el lema del cilindro, existe U^x, un entorno abierto de x en X, tal que $U^x \times Y \subset W^x$. La colección $\{U^x : x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X por tanto existe un subconjunto finito X' de X tal que $X = \bigcup\{U^x : x \in X'\}$. Entonces

$$X \times Y \subset \bigcup_{x \in X'} U^x \times Y \subset \bigcup_{x \in X'} \bigcup_{\alpha \in A^x} W_\alpha.$$

□

Demostración del teorema de Heine–Borel

($\Rightarrow$) Un compacto en un T_2 es cerrado. La familia de cubos $(-m, m)^n$, $m \in \mathbb{Z}^+$ es un recubrimiento abierto de C, por tanto existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que $C \subset (-M, M)^n$.
($\Leftarrow$) Dado que $[-M, M]$ es compacto, $[-M, M]^n$ también es compacto por tanto C es un subconjunto cerrado de un compacto. $\square$

EJERCICIO 3. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff que no tiene puntos aislados. Demostrar que entonces X no es numerable.
Respuesta.
1. Dados $x \in X$ y U abierto, existe un abierto no vacío V tal que $V \subset U$ y $x \notin \overline{V}$.
En efecto: si $y \neq x$, $y \in U$, entonces existen V_x, V_y entornos abiertos de x, y respectivamente, tales que $V_x \cap V_y = \varnothing$. El conjunto $V = V_x \cap U$ cumple la propiedad pedida pues $\overline{V} \subset X \setminus V_x$.
2. Para ver que X no es numerable es suficiente ver que para todo numerable $E \subset X$ existe $x \in X$ tal que $x \notin E$.

166 Teorema. *Sea X un espacio topológico compacto y sea Y un conjunto totalmente ordenado. Si $f : X \to Y$ es continua (respecto de la topología del orden de Y) entonces existen $a, b \in X$ tales que $f(X) \subset [f(a), f(b)]$.*

Demostración. La colección de conjuntos $\{y \in f(X) : y \geq f(x)\}$, $x \in X$, es una colección de cerrados de $f(X)$ con la propiedad de intersección finita. Entonces su intersección es

no vacía. La intersección solamente puede tener un punto de la forma $f(b)$ para un $b \in X$ de forma que para todo $x \in X$, $f(x) \leq f(b)$.
De forma análoga, existe $a \in X$ tal que para todo $x \in X$, $f(x) \geq f(a)$. $\square$

167 Corolario. *Si además X es conexo entonces $f(X) = [f(a), f(b)]$.*

6. Axiomas de numerabilidad

6.1. Primer y segundo axioma de numerabilidad

168 Definición. Un espacio topológico X cumple el *primer axioma de numerabilidad* (IAN) si todo punto $x \in X$ tiene una base de entornos numerable.

169 Definición. Un espacio topológico X cumple el *segundo axioma de numerabilidad* (IIAN) si su topología tiene una base numerable.

Obviamente, todo espacio que es IIAN es también IAN.
Recuérdense las dos definiciones siguientes:

170 Definición. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es *denso* en X si $\overline{A} = X$.

OBSERVACIÓN: A es denso en X si y solamente si todo abierto no vacío U tiene intersección (no vacía) con A.

171 Definición. Un espacio topológico X es metrizable si existe en X una métrica que que genera la topología.

172 Ejemplo. Todo espacio topológico metrizable es IAN; sin embargo puede no ser IIAN.

173 Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ es IIAN por tanto también IAN.

OBSERVACIÓN: Si X es IIAN y A es un subconjunto discreto entonces A es numerable.

174 Ejemplo (Un espacio metrizable que no es IIAN)**.** En el conjunto de sucesiones de números reales $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se considera la métrica $\rho(x,y) = \sup\{\inf\{|x_n - y_n|, 1\} : n \in \mathbb{N}\}$. El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}, x_n = 0 \text{ ó } 1\}$ es un subconjunto no numerable y es discreto: si $x, y \in A$, $x \neq y$, se tiene $\rho(x,y) = 1$. Por tanto, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \rho)$ **no es** IIAN.

175 Proposición. *Tanto el* IAN *como el* IIAN *se transmiten a los subespacios y a los productos numerables de espacios.*

176 Proposición. *Si X es un espacio topológico* IIAN *entonces*

a. *todo recubrimiento abierto de X tiene un subrrecubrimiento* numerable;

b. *X tiene un subconjunto numerable y denso.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de X.

a. Sea $\mathcal{R}$ un recubrimiento abierto de X. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se elige (si es posible) $U_n \in \mathcal{R}$ tal que $B_n \subset U_n$. Se obtiene así la colección $\mathcal{R}' = \{U_n : n \in N'\}$; $N' \subset \mathbb{N}$.

   La colección $\mathcal{R}'$ es un subrecubrimiento numerable de X: es obviamente numerable y $\forall x \in X$, $\exists U \in \mathcal{R}$ tal que $x \in U$ y $\exists B_n \in \mathcal{B}$ con $x \in B_n \subset U$ así que en algún momento se habrá elegido un U_n $(n \in N')$ con $x \in U_n$.

b. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_n$. El conjunto $Q = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X: todo abierto de la base corta a Q, por tanto todo abierto corta a Q.

$\square$

6.2. Espacios separables y espacios de Lindelöf

177 Definición. Un espacio topógico que cumple la propiedad *a.* de la proposición anterior se llama *espacio de Lindelöf*

178 Definición. Un espacio topológico que cumple la propiedad *b.* de la proposición anterior se denomina *espacio separable.*

OBSERVACIONES:

- Todo espacio compacto es Lindelöf.
- Todo espacio topológico IIAN es separable y Lindelöf. Sin embargo, existen espacios topológicos separables y espacios topológicos de Lindelöf que no son IIAN.

179 Ejemplo. El espacio $\mathbb{R}_{[)}$ es IAN, separable y de Lindelöf; sin embargo **no es** IIAN.

a. *No es* IIAN*:* Sea $\mathcal{B}$ una base de la topología. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $[x, x+1)$ es un abierto por tanto existe $\mathrm{B}_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathrm{B}_x \subset [x, x+1)$, por tanto, si $x \neq y$ entonces $\mathrm{B}_x \neq \mathrm{B}_y$ y entonces $\mathcal{B}$ no puede ser numerable.

b. *Es* IAN*:* Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es una base de entornos de x.

c. *Es separable:* $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}_{[)}$.

d. *Es Lindelöf:* Sea $\mathcal{R}$ un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}_{[)}$, sin pérdida de generalidad puede suponerse que los elementos de $\mathcal{R}$ son abiertos de la base canónica (es decir, de la forma $[x, y)$). Sea $\mathrm{D} = \cup\{(x, y) : [x, y) \in \mathcal{R}\}$. El conjunto D es unión de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y por tanto unión numerable de intervalos abiertos disjuntos. Entonces $\mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ es numerable (si $x \in \mathrm{D}$, existe ε tal que $(x, x + \varepsilon) \cap \mathrm{D} = \varnothing$). Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ existe un elemento de $\mathcal{R}$ que lo cubre. Ahora, D es una abierto de $\mathbb{R}$ con la topología usual, por tanto Lindelöf, entonces existe una colección numerable de elementos $[x, y)$ de $\mathbb{R}$ tal que los correspondientes (x, y) recubren D. Las dos colecciones juntas recubren $\mathbb{R}$.

En los espacios metrizables la situación es diferente.

180 Proposición. *Sea X un espacio topológico metrizable.*

a. Si X es separable entonces también es IIAN*.*

b. Si X es de Lindelöf entonces también es IIAN*.*

Demostración.

a. Sea $Q \subset X$ numerable y denso en X; entonces

$$\{B(q,r) \mid q \in Q, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

es base de la topología de X.

En efecto: sea U abierto de X y $x \in U$; existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$ y además $B(x,\frac{\varepsilon}{4}) \cap Q \neq \varnothing$. Sea $q \in B(x,\frac{\varepsilon}{4}) \cap Q$. Dado que $B(x,\varepsilon)$ es abierto existe $r \in \mathbb{Q}^+ \cap [\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{2}]$. Entonces $x \in B(q,r) \subset B(x,\varepsilon) \subset U$.

b. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$ existe un numerable $X_n \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{q \in X_n} B(q,\frac{1}{n}).$$

La colección

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \left\{B(q,\frac{1}{n}) \mid q \in X_n\right\}$$

es una base de la topología de X.

En efecto: Sea U un abierto de X y $x \in U$. Existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $B(x,\frac{1}{n}) \subset U$. Dado que $\{B(q,\frac{1}{2n}) : q \in X_{2n}\}$ es un recubrimiento de X, existe $q_x \in X_{2n}$ tal que $x \in B(q_x,\frac{1}{2n}) \subset B(x,\frac{1}{n}) \subset U$.

$\square$

La propiedad de ser espacio de Lindelöf no se transmite ni a productos ni a subespacios.

181 Ejemplo (Producto de dos Lindelöf que no es Lindelöf)**.** La recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_{[,)}$ es un espacio Lindelöf; sin embargo, el plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_{[,)} \times \mathbb{R}_{[,)}$ no lo es.

182 Ejemplo (Subespacio de un Lindelöf que no es Lindelöf)**.** Con el orden lexicográfico, $[0,1] \times [0,1]$ es un espacio de Lindelöf; sin embargo, su subespacio $[0,1] \times (0,1)$ no lo es.

183 Proposición. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua entonces*

a. X Lindelöf $\implies f(X)$ Lindelöf;

b. X separable $\implies f(X)$ separable.

7. El grupo fundamental

A lo largo de este curso, se han estudiado varias propiedades de un espacio topológico que se transmiten por aplicaciones continuas (compacidad, conexión, separabilidad,...) de forma que permiten decidir que dos espacios topológicos que no comparten una de estas propiedades no pueden ser homeomorfos.

En este capítulo se estudian nuevas propiedades con estas características y que, por tanto, también permitirán analizar si dos espacios podrían ser homeomorfos. Estas nuevas propiedades tendrán la particularidad de ser algebráicas: a la topología del espacio se asociará un determinado grupo (algebraico) que permanece invariante por aplicaciones continuas. Este grupo asociado al espacio topológico (que se llamará *grupo fundamental*) está relacionado con el conjunto de caminos cerrados (lazos) sobre el espacio topológico. Dados dos caminos cerrados con base en un mismo punto se estudia si existe una transformación continua que transforme uno en el otro. En caso de existir, los caminos se consideran equivalentes. El conjunto de clases de equivalencia junto con una operación de composición de caminos constituirá el grupo fundamental citado.

7.1. Homotopía de caminos

Sea X un espacio topológico. Dos caminos γ_1, γ_2 en X (recuérdese, aplicaciones continuas $[0,1] \to X$) con los mismos extremos son homótopos si existe una aplicación continua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $\forall t \in [0,1]$ $F(t,0) = \gamma_0(t)$ y $F(t,1) = \gamma_1(t)$ y además $\forall s \in [0,1]$, $F(0,s) = F(0,0) = F(0,1)$ y $F(1,s) = F(1,0) = F(1,1)$. Una aplicación F con estas características se llamará una *homotopía de caminos*.

La homotopía de caminos es una relación de equivalencia de caminos con los extremos fijos. Para ver la transitividad de la relación: si se escribe $\gamma_0 \sim \gamma_1$ cuando γ_0 y γ_1 son caminos con los mismos extremos entre los que existe una homotopía de caminos entonces si F_1 y F_2 son homotopías de caminos que unen γ_0 con γ_1 y γ_1 con γ_2, respectivamente,

$$F(t,s) = \begin{cases} F_1(t, 2s) & t \in [0,1], \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ F_2(t, 2(s - \frac{1}{2})) & t \in [0,1], \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

es una homotopía de caminos que une γ_0 con γ_2; por tanto $\gamma_0 \sim \gamma_2$.

Si un camino γ_2 es una reparametrización de otro γ_1 —es decir, si existe una aplicación $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ continua con $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 1$ tal que $\gamma_2(t) = \gamma_1(\sigma(t))$— entonces ambos caminos están en la misma clase de equivalencia. Una homotopía de caminos que pasa de uno a otro será $F(t,s) = \gamma_1(s\sigma(t) + (1-s)t)$.

Por otro lado, dados dos caminos γ_0 y γ_1 para los que el extremo derecho del primero ($\gamma_0(1)$) coincide con el extremos izquierdo del segundo ($\gamma_1(0)$) se pueden componer creando un camino $\gamma_0 \star \gamma_1$ que une $\gamma_0(0)$ con $\gamma_1(1)$. Esta operación de composición de caminos requiere la coincidencia de los extremos mencionada. En lo que sigue, trataremos solamente con caminos cerrados (lazos), es decir, caminos que finalizan en el mismo punto del que parten y además ese punto será un punto fijo del espacio $x_0 \in X$ que se denominará punto base. Bajo estas condiciones, la composición de caminos siempre está definida y se puede trasladar a las correspondientes clases de equivalencia. Si se denota por $[\gamma]$ la clase de equivalencia, por homotopía de caminos, de un lazo γ con punto base x_0 resulta que si $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ y $\gamma_2 \sim \gamma_2'$ entonces $[\gamma_1 \star \gamma_2] = [\gamma_1' \star \gamma_2']$ y por tanto $[\gamma_1] \star [\gamma_2] = [\gamma_1 \star \gamma_2]$ está bien definida.

7.2. Grupo fundamental

Sean X un espacio topológico y x_0 un punto de X. El *grupo fundamental* de X respecto de x_0 (denotado $\Pi_1(X, x_0)$) es el conjunto de clases de homotopía de caminos de lazos con punto base en x_0 con la operación de composición recién definida.

El grupo fundamental tiene, efectivamente, estructura de grupo.

El elemento neutro del grupo será la clase de equivalencia de lazos homótopos a un punto: un lazo γ de X, con punto base x_0, es homótopo a un punto si existe una homotopía de

caminos F tal que $F(t,0)=\gamma(t)$ y $F(t,1)=x_0$. están todos enunciados El elemento inverso de una determinada clase $[\gamma]$ es la clase de equivalencia del lazo obtenido recorriendo la imagen de γ en sentido inverso: $\overline{\gamma}(t)=\gamma(1-t)$.
La asociatividad de la operación es intuitivamente obvia pero requiere algún trabajo técnico de reparametrización de intervalos que puede resumirse en la formulación siguiente: Si $\sigma:[0,1]\to[0,1]$ es la reparamentrización definida por

$$\sigma(t)=\begin{cases} 2t & t\in[0,\frac{1}{4}] \\ t+\frac{1}{4} & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

entonces $(\gamma_1\star(\gamma_2\star\gamma_3))(\sigma(t))=((\gamma_1\star\gamma_2)\star\gamma_3)(t)$.

7.3. Independencia del punto base

En un espacio X conexo por caminos, el grupo fundamental no depende del punto base: los grupos fundamentales referidos a distintos puntos base son isomorfos.

184 Proposición. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos entonces para cualesquiera $x_0,x_0'\in X$, $\Pi_1(X,x_0)$ y $\Pi_1(X,x_0')$ son isomorfos.*

Demostración. El isomorfismo se obtiene a través de un camino que una los puntos x_0 y x_0': sea κ un camino en X tal que $\kappa(0) = x_0$ y $\kappa(1) = x_0'$, entonces la aplicación $\varphi : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(X, x_0')$ definida por $\varphi([\gamma]) = [\overline{\kappa} \star \gamma \star \kappa]$ es un isomorfismo de grupos. Que la definición es correcta y que es una biyección se comprueban fácilmente. Para ver que es un homomorfismo se observa que

$$
\begin{aligned}
\varphi([\gamma \star \gamma']) = &\\
&[\overline{\kappa} \star (\gamma \star \gamma') \star \kappa] = [\overline{\kappa} \star (\gamma \star (\kappa \star \overline{\kappa}) \star \gamma') \star \kappa] = \\
&[\overline{\kappa} \star \gamma \star \kappa] \star [\overline{\kappa} \star \gamma' \star \kappa] = \varphi([\gamma]) \star \varphi([\gamma']).
\end{aligned}
$$

□

El grupo fundamental más simple que puede ocurrir es el de aquellos espacios conexos por caminos en los que todo lazo es homótopo a un punto. En este caso, el grupo se reduce al elemento neutro.
Un espacio topológico conexo por caminos cuyo grupo fundamental es trivial se denomina *simplemente conexo*.

185 Ejemplo. El espacio $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$) es simplemente conexo: dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^2$ y dado cualquier lazo γ con base en x_0, la homotopía $F(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + sx_0$ transforma el lazo γ en el punto x_0 ($F(t, 1) = x_0$).

Observación: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no es simplemente conexo.

186 Ejemplo. Si $p \in \mathbb{S}^n$ entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ es simplemente conexo. Razón: la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

El grupo fundamental es invariante bajo homeomorfismos.

Teorema 187. *Sean X, Y espacios topológicos conexos por caminos y $f : X \to Y$ una función continua. Sea $f_\star : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, f(x_0))$ definida por $f_\star([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ entonces*

a. $f_\star$ es un homomorfismo.

b. Si f es un homeomorfismo entonces $f_\star$ es un isomorfismo.

c. Si Z es un tercer espacio topológico y $g : Y \to Z$ es continua entonces $(g \circ f)_\star = g_\star \circ f_\star$.

Demostración. Es suficiente comprobar que $f \circ (\gamma \star \gamma') = (f \circ \gamma) \star (f \circ \gamma')$. □

Importante: El recíproco de b. no es cierto en general. Por ejemplo, tanto $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{S}^2$ son simplemente conexos pero no son homeomorfos. Más claramente, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son simplemente conexos, pero no son homeomorfos.
Sean X un espacio topológico y $A \subset X$, ambos conexos por caminos.

188 Definición. El conjunto A es un retracto de deformación fuerte de X si existe una aplicación $r : X \times [0,1] \to X$ continua tal que $\forall x \in X, \forall a \in \mathsf{A}, \forall s \in [0,1]$ $r(x,0) = x, r(x,1) \in \mathsf{A}, r(a,s) = a$ es decir $r_0(x) = x, r_s(a) = a, r_1(x) \in \mathsf{A}$ o bien $r_0 = \mathrm{id}_X, r_s|_{\mathsf{A}} = \mathrm{id}_{\mathsf{A}}, r_1(X) \subset \mathsf{A}$.

Si A es un retracto de deformación fuerte de X entonces $\forall a_0 \in \mathsf{A}$, $\Pi_1(X, a_0) \sim \Pi_1(\mathsf{A}, a_0)$.

189 Ejemplo. $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$.

190 Proposición. *Sean X, Y espacios topológicos conexos por caminos y $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ entonces $\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \sim \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$.*

Recuérdese: Si $\mathfrak{G}_1$ y $\mathfrak{G}_2$ son grupos entonces $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ es un grupo con la operación $(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$.

Demostración. Sean P^X y P^Y las proyecciones de $X \times Y$ sobre X e Y respectivamente. Entonces la aplicación $\phi : \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$ definida por $[\gamma] \mapsto ([P^X(\gamma)], [P^Y(\gamma)])$ es un homomorfismo de grupos que es inyectivo y suprayectivo. $\square$

7.4. Espacio recubridor — Proyección recubridora — Lema de elevación

Hasta el momento se han estudiado algunas propiedades que permiten calcular el grupo fundamental de un espacio topológico a partir de otros conocidos. Sin embargo, hasta el momento solamente se han visto algunos espacios cuyo grupo fundamental es trivial.
A continuación se calcula el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ que ya no es trivial y a partir de él y de las propiedades anteriormente vistas pueden calcularse algunos otros.

191 Definición (Espacio recubridor. Proyección recubridora)**.** Sea $P : E \to X$ una aplicación continua y suprayectiva entre los espacios topológicos E y X. El espacio E es un *espacio recubridor* y P es una *proyección recubridora* de X si $\forall x \in X$, $\exists G_x$ entorno abierto tal que $P^{-1}(G_x)$ es unión disjunta de abiertos V_α tales que $\forall \alpha$, $P|_{V_\alpha} : V_\alpha \to G_\alpha$ es un homeomorfismo.

192 Ejemplo. La recta real $\mathbb{R}$ es un espacio recubridor de $\mathbb{S}^1$ con proyección recubridora $t \mapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Para el punto $x = (1,0) \in \mathbb{S}^1$ y para $\mathsf{G} = \mathbb{S} \cap \{x > 0\}$ resulta $P^{-1}(\mathsf{G}) = \cup\{(-\frac{1}{4} + k, \frac{1}{4} + k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Lema de elevación

193 Definición. Sea $P : E \to X$ una proyección recubridora de X y $f : \mathsf{A} \to X$ una aplicación continua. Una aplicación continua $\tilde{f} : \mathsf{A} \to E$ es una *elevación* de f si $\forall x \in \mathsf{A}$, $P(\tilde{f}(x)) = f(x)$.

En las dos proposiciones siguientes, $P : E \to X$ será una proyección recubridora de X tal que $P(e_0) = x_0$ para los puntos $x_0 \in X$ y $e_0 \in E$.

194 Proposición (Lema de elevación). *Todo camino γ en X con $\gamma(0) = x_0$ admite una única elevación $\tilde{\gamma}$ a E con $\tilde{\gamma}(e_0) = x_0$.*

Demostración.
Unicidad: Si $\tilde{\tilde{\gamma}}$ fuese otra elevación con las mismas características, el conjunto $\Gamma = \{t \in [0,1] : \tilde{\tilde{\gamma}}(t) = \tilde{\gamma}(t)\}$ sería a. no vacío ($0 \in \Gamma$); b. abierto; c. cerrado; por tanto, por conexión, $\Gamma = [0,1]$ y $\tilde{\tilde{\gamma}} = \tilde{\gamma}$.
Existencia: Sea $\{U_x\}$ un recubrimiento abierto de X generado por la proyección recubridora. Entonces $\{\gamma^{-1}(U_x)\}$ es un recubrimiento abierto de $[0,1]$. Si δ es un número de Lebesgue asociado a este recubrimiento y $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $\delta > \frac{1}{n_0}$ entonces $\forall i = 1, 2, \ldots, n_0$, $\exists U_x = U_i$ tal que $\gamma([\frac{i-1}{n_0}, \frac{i}{n_0}]) \subset U_i$. $P^{-1}(U_i)$ contiene un abierto V_i tal que $e_0 \in V_i$ y $P|_{V_i} : V_i \to U_x$ es un homeomorfismo. Para $t \in [0, \frac{1}{n_0}]$, $\tilde{\gamma}(t) = (P|_{V_i})^{-1} \circ \gamma(t)$;

$\tilde{\gamma}(\frac{1}{n_0}) \in P^{-1}(U_2)$; existe V_2 abierto de E tal que $P|_{V_2} : V_2 \to U_2$ es un homeomorfismo; $\forall t \in [\frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}]$, $\tilde{\gamma}(t) = (P|_{V_2})^{-1} \circ \gamma(t)$. Iterando este procedimiento n_0 veces se obtiene $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ tal que $\gamma(t) = P \circ \tilde{\gamma}(t)$. □

La proposición siguiente, del mismo estilo que el anterior lema, permite elevar una homotopía de un espacio a un espacio recubridor. Su demostración del mismo estilo que la anterior pero cambiando a un recubrimiento del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ es técnicamente algo más complicada y se suprime.

195 Proposición (Elevación de homotopías). *Toda homotopía de caminos $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ con $F(0,0) = x_0$ admite una elevación única $\tilde{F}$ a E con $\tilde{F}(0,0) = e_0$.*

Observación: $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos en E.

Para finalizar, se construye un grupo fundamental de un espacio topológico que resulta ser no trivial. A partir de este grupo y de los resultados vistos se pueden calcular algunos otros.

196 Teorema. $\Pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) = \mathbb{Z}$.

Demostración. Se toma la proyección recubridora $P : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $t \mapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$, $x_0 = (1,0)$ y $e_0 = 0$. Para cada lazo γ de $\mathbb{S}^1$ con punto base x_0 se define $v([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1)$.

La función v está bien definida ya que lazos homótopicos tienen elevaciones homotópicas. Dado que $P(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = x_0$, se tiene que $v([\gamma]) \in \mathbb{Z}$.
Resulta que $v : \Pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo:

- v **es suprayectiva:** se toma $\gamma_n(t) = (\cos 2\pi n t, \operatorname{sen} 2\pi n t)$.

- v **es inyectiva:** si $v([\gamma]) = v([\gamma'])$ entonces $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ y por tanto $F(t,s) = P((1-s)\tilde{\gamma}(t) + s\tilde{\gamma}'(t))$ es una homotopía entre γ y γ'.

- v **es un homomorfismo:** $v([\gamma] \star [\gamma']) = v([\gamma]) + v([\gamma'])$. Sea

$$\lambda(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{\gamma}'(2t-1) + \tilde{\gamma}(1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Dado que $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$, $P(\lambda) = \gamma \star \gamma'$ y por tanto $\lambda = \gamma \tilde{\star} \gamma'$. Se tiene entonces que $v([\gamma] \star [\gamma']) = v([\gamma \star \gamma']) = \lambda(1) = \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\gamma}'(1)$.

$\square$