Topología — Convocatoria extraordinaria

Topología, UAM 2018-19 **3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

Apellidos, Nombre ______________________ Inic. apellido ______

D.N.I. __________ Grupo __________ Firma ______________

Cada apartado de cada ejercicio vale 1 *punto y hay más de 10 apartados en total. La calificación final será el mínimo entre 10 y la puntuación obtenida en este examen. Todas las respuestas deben justificarse, salvo que se indique lo contrario.*

1. (2 puntos) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo sencillo) si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si X es un espacio topológico y $\mathsf{A}, \mathsf{D} \subset X$, entonces $\partial(\mathsf{A} \cup \mathsf{D}) \subset \partial\mathsf{A} \cup \partial\mathsf{D}$.

(b) Si X es un espacio métrico y $G \neq \emptyset$ es un subconjunto abierto de X, entonces $G = \operatorname{Int}(\overline{G})$.

2. (3 puntos)
(a) En un espacio métrico (X, d), sean

$$B(x;r) = \{y \in X : \, d(x,y) < r\}, \qquad \overline{B}(x;r) = \{y \in X : \, d(x,y) \leq r\}.$$

Demuestra que siempre se cumple la inclusión $\overline{B(x;r)} \subset \overline{B}(x;r)$ y que puede ser estricta, dando un ejemplo pertinente.

(b) Consideremos el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado de la topología producto de Sorgenfrey. Para el subconjunto $\mathsf{A} = \{(x,y) : \, x > 0, -x \leq y < x\}$, determina su interior y su frontera. No es necesario razonar la respuesta.

$\overset{\circ}{\mathsf{A}} =$

$\partial \mathsf{A} =$

(c) Para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$: $\mathsf{A} = (0, +\infty)$, $\mathsf{B} = \mathbb{Z}$, calcula su cierre y su interior en la topología conumerable, sin justificar el trabajo.

$\overline{\mathsf{A}} =$ $\qquad$ $\overline{\mathsf{B}} =$

$\overset{\circ}{\mathsf{A}} =$ $\qquad$ $\overset{\circ}{\mathsf{B}} =$

3. (2 puntos) Razona las respuestas a las siguientes preguntas.

(a) Demuestra que $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \ A$ es abierto y denso en la topología usual de $\mathbb{R}\}$ es una topología de $\mathbb{R}$.

(b) ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ del apartado anterior un espacio de Hausdorff?

4. (2 puntos)
(a) Demuestra que el intervalo $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ es un conjunto cerrado pero no compacto en la topología de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$.

(b) Si K es un compacto en un espacio topológico X y existen U_1 y U_2 abiertos de X tales que $K \subset U_1 \cup U_2$, $K \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ y $K \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (es decir, K no es conexo), entonces $K \cap U_i$ es compacto, $i = 1, 2$.

5. (2 puntos)
(a) Sea $f: X \to Y$ una función continua. Demuestra que si X es conexo entonces $f(X)$ es conexo.

(b) Determina razonadamente si entre los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ hay dos que sean homeomorfos:

$$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}; \qquad B = \{(x,y) : x^2 - y^2 \leq 1\}; \qquad C = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$