14. Axiomas de numerabilidad. Espacios separables

93. Si un espacio es IAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina? Lo mismo para IIAN.

94. Sea X un espacio IAN. Sean $A \subset X$ y $x \in X$. Demuestra lo siguiente: $x \in \partial A$ si y solamente si existen $(x_n)_{n>0} \subset A$ y $(y_n)_{n>0} \subset X \setminus A$, ambas con límite x.

95. Demuestra que si en un espacio topológico X, un conjunto A y su complementario son densos (esto es, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{X \setminus \mathsf{A}} = X$), entonces $\mathring{\mathsf{A}} = \mathsf{Int}\,(X \setminus \mathsf{A}) = \varnothing$. ¿Es cierto el recíproco?

96. Prueba que si un espacio topológico X es separable (es decir, existe $A \subset X$ numerable y tal que $\bar{A} = X$) entonces toda familia de abiertos disjuntos en X es numerable.

97. Se considera el espacio $(X, \mathcal{T}_{\mathsf{cofinita}})$. ¿Es un espacio separable?

98. Demuestra que un subespacio abierto de un espacio topológico separable es también separable.

99. Recordemos que un espacio topológico X tiene la propiedad de Lindelöf si todo recubrimiento por abiertos de X admite un subrecubrimiento (como mucho) numerable.

i) Demuestra que un subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es también Lindelöf.

ii) Encuentra un contrajemplo para ver que esta propiedad no es cierta en general.

15. Homotopía. Grupo fundamental

100. Sea $\mathbb{D} = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ el disco unidad abierto (en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual).

i) Prueba que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D} \cup \{(1\,,0)\}$ no son homeomorfos.

ii) Consideremos $\overline{\mathbb{D}} = \{(x\,,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demuestra que un homeomorfismo $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ envía la frontera de $\overline{\mathbb{D}}$ en la frontera y el interior de $\overline{\mathbb{D}}$ en el interior. Indicación: considera los grupos fundamentales de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{p\}$ y $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{f(p)\}$.

101. Halla el grupo fundamental de cada uno de los siguientes espacios:
i) $\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ y de $\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 4\}$,
ii) el toro sólido: $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{D} = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

102. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Si A y D son subespacios simplemente conexos con $\mathsf{A} \cap \mathsf{D} \neq \varnothing$, entonces $\mathsf{A} \cup \mathsf{D}$ también lo es.

ii) Si X es homeomorfo a la frontera de $[0\,,1] \times [0\,,1]$, el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

iii) Si el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$ entonces X es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

iv) Si A y D son retractos de deformación fuerte de espacios homeomorfos, entonces A y D son homeomorfos.

103. Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

i) $X_1 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

ii) $X_2 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$.

iii) $X_3 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

iv) $X_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 < y < 1\}$.